第二届全国大学生数学竞赛决赛试卷

（数学类，2011 年 3 月）

考试形式：<u>闭卷</u>　考试时间：<u>150</u> 分钟　满分：<u>100</u> 分.

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	15	20	20	100
得分							

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其他纸上一律无效.
2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.
3、如当题空白不够，可写在当页的背面，并标明题号.

得　分	
评阅人	

一、（本题 15 分）求出过原点且和椭球面 $4x^2+5y^2+6z^2=1$ 的交线为一个圆周的所有平面.

得　分	
评阅人	

二、（本题 15 分）设 $0<f(x)<1$，无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ 都收敛. 求证：$\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x > \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

得　分	
评阅人	

三、（本题15分）设 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n$ 收敛，$t_n = a_{n+1}+2a_{n+2}+\cdots+ka_{n+k}+\cdots$. 证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.

得　分	
评阅人	

四、（本题 15 分）设 $A\in M_n(\mathbb{C})$，定义线性变换 $\sigma_A: M_n(\mathbb{C})\to M_n(\mathbb{C})$，$\sigma_A(X)=AX-XA$. 证明：当 A 可对角化时，σ_A 也可对角化. 这里 $M_n(\mathbb{C})$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵组成的线性空间.

得　分	
评阅人	

五、（本题 20 分）设连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $\sup\limits_{x,y\in\mathbb{R}} |f(x+y)-f(x)-f(y)|<+\infty$. 证明：存在实常数 a 满足 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)-ax|<+\infty$.

得　分	
评阅人	

六、（本题 20 分）设$\varphi: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$是非零线性映射，满足$\varphi(XY)=\varphi(YX)$，$\forall X,Y \in M_n(\mathbb{R})$，这里$M_n(\mathbb{R})$是实数域$\mathbb{R}$上$n$阶方阵组成的线性空间. 在$M_n(\mathbb{R})$上定义双线性型$(-,-): M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$如下：$(X,Y)=\varphi(XY)$.

(1) 证明$(-,-)$是非退化的，即若$(X,Y)=0$，$\forall Y \in M_n(\mathbb{R})$，则$X=0$.

(2) 设$A_1,\ldots,A_{n^2}$是$M_n(\mathbb{R})$的一组基，$B_1,\ldots,B_{n^2}$是相应的对偶基. 即$(A_i,B_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, 当 i \neq j \\ 1, 当 i=j\end{cases}$. 证明$\sum_{i=1}^{n^2} A_i B_i$是数量矩阵.