第二届全国大学生数学竞赛决赛试卷

（非数学类，2011 年 3 月）

考试形式：闭卷　考试时间：150 分钟　满分：100 分.

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	15	10	15	17	16	12	15	100
得分								

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其他纸上一律无效.
2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.
3、如当题空白不够，可写在当页的背面，并标明题号.

得　分	
评阅人	

一、（本题共 3 小题，每小题各 5 分，共 15 分）计算下列各题（要求写出重要步骤）.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$;

(3) 已知 $\begin{cases} x=\ln(1+\mathrm{e}^{2t}) \\ y=t-\arctan \mathrm{e}^{t}, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

得　分	
评阅人	

二、（本题 10 分）求方程

$(2x+y-4)\mathrm{d}x+(x+y-1)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

得　分	
评阅人	

三、（本题 15 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $f(0)$，$f'(0)$，$f''(0)$ 均不为零. 证明：存在唯一一组实数 k_1,k_2,k_3，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

得　分	
评阅人	

四、（本题 17 分）设 Σ_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，其中 $a>b>c>0$，

Σ_2： $z^2=x^2+y^2$，Γ为Σ_1和Σ_2的交线．求椭球面Σ_1在Γ上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值．

得　分	
评阅人	

五、（本题 16 分）已知S是空间曲线$\begin{cases} x^2+3y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$绕$y$轴旋转形成的椭球面的上半部分（$z\ge 0$）（取上侧），$\Pi$是$S$在$P(x,y,z)$点处的切平面，$\rho(x,y,z)$是原点到切平面$\Pi$的距离，$\lambda,\mu,\nu$表示$S$的正法向的方向余弦．

计算：（1）$\iint\limits_S \dfrac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$；（2）$\iint\limits_S z(\lambda x+3\mu y+\nu z)\mathrm{d}S$．

得　分	
评阅人	

六、（本题12 分）设$f(x)$是在$(-\infty,+\infty)$内的可微函数，且$|f'(x)|< mf(x)$，其中$0<m<1$．任取实数a_0，定义$a_n=\ln f(a_{n-1}), n=1,2,\cdots$．证明：$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n-a_{n-1})$绝对收敛．

得　分	
评阅人	

七、（本题 15 分）是否存在区间$[0,2]$上的连续可微函数$f(x)$，满足$f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)|\le 1$，$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\le 1$？请说明理由．