南昌大学第四届高等数学竞赛（数学专业类 2004、2005 级）试卷

序号：__________　　姓名：__________　　学院：__________

专业：__________　　学号：__________　　考试日期：2007 年 9 月 16 日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	累分人签名
题分	21	10	10	13	12	8	12	14			100	
得分												

注: 本卷共九页，八道大题，考试时间为 8:30——11:30.

一、简答题(每题 7 分，共 21 分)

得分	评阅人

1、下面的说法可以用作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的定义吗？

“$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:0<|x-x_0|<\delta$，有 $|f(x)-A|<\varepsilon\delta$”。

正确的给以证明，不正确的举例说明。

2、求 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$。求 $f(x)$ 的间断点并指出其类型。

3、求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a^n}{n}+\dfrac{b^n}{n^2}\right)x^n\ (a,b>0)$ 的收敛半径和收敛域。

二、证明题（10 分）

得分	评阅人

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)\ (a>0)$ 内连续，且满足 *Lipschitz* 条件，即存在 $L>0$，使得 $\forall x_1,x_2\in[a,+\infty)$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|$，证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a>0)$ 内有界且一致连续。

三、证明题（10分）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上每点处都取极值，则 $f(x)$ 恒等于某个常数。

四、证明题（13分）

设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少，$0<f(x)<\left|f'(x)\right|$，则 $xf(x)>\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right)$，$x\in(0,1)$。

五、证明题（12分）

设 $f_n(x)=(\sin x)^{\frac{1}{n}}$，$n=1,2,\cdots$，研究 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,\pi]$，$[\delta,\pi-\delta](0<\delta<\pi)$ 的一致收敛性。

六、计算题（8分）

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$

七、计算题（12分）

计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3dydz+2y^3dzdx+3\left(z^2-1\right)dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2\ (z\geq 0)$ 上侧。

八、计算题（14分）

计算 $I(x)=\int_0^{\infty}\frac{\sin xt}{t\left(1+t^2\right)}dt$