

# 哈尔滨工程大学第十五届数学竞赛

考试科目: 数学竞赛(非专业高年级组)

一	1	2	3	4	5	6	7	8
分数								
	9	10	11	12	13	14	15	总分
分数								
二	16	17						
分数								总分

## 一、(共15道题, 每小题10分)

- 已知对任意  $x, y > 0$  有  $f(xy) = f(x) + f(y)$  且  $f'(1) = 1$ , 求  $f(x)$ 。
- 设  $f''(0)$  存在, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - xf'(x)}{x^3} = 1$ , 求  $f(0), f'(0), f''(0)$  的值。

3. 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+\frac{1}{1}} + \frac{\ln(1+\frac{2}{n})}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\ln(1+\frac{n}{n})}{n+\frac{1}{n}} \right]$ 。

4. 已知  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}} & x < 0 \\ \frac{xe^x}{(x+1)^2} & x \geq 0 \end{cases}$ , 求  $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$  在  $x \geq -1$  时的表达式。

5. 判断方程  $\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \dots + \frac{1}{x-a_n} = 0$  ( $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ) 实根个数及分别属于的区间 (注: 要求写出过程)。

6. 已知区域  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ , 计算二重积分  $\iint_D \frac{(x+1)^2 + xy^5}{\sqrt{1+x^2+y^2}} d\sigma$ 。

7. 区域  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$ , 计算三重积分  $\iiint_{\Omega} (x+z)^2 dv$ 。

8. 已知函数  $f(u, v)$  有连续的偏导, 且  $f(1, 1) = 1, f'_u(1, 1) = 2, f'_v(1, 1) = 3$ , 求曲面

$z = xf(2x - y, 3y - 2x)$  在  $(1, 1, 1)$  点处沿  $xoy$  平面上曲线  $x^2 + 2y^2 = 3$  在  $(1, 1)$  点外法线方向上的方向导数。

9. 设  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上有连续的三阶导数, 且  $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$ . 证明:  $\exists \xi \in (-1, 1)$ , 使  $f'''(\xi) = 3$ .

10. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上一阶可导, 在  $(a, b)$  内二阶可导,  $f(a) = f(b) = 0$ ,  $f'(a)f'(b) > 0$ , 证明:

(1)  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使  $f(\xi) = 0$ ;

(2)  $\exists \eta \in (a, b)$ , 使  $f''(\eta) = f(\eta)$ .

11. 已知  $A(1, 0, 0)$  与  $B(0, 1, 1)$ , 线段  $AB$  绕  $z$  轴旋转一周所围成的旋转曲面为  $s$ . 求由  $s$  及两平面  $z = 0, z = 1$  所围的立体体积。

12. 已知  $L$  为  $y = 16 - x^4$  上从  $A(-2, 0)$  到  $B(2, 0)$  顺时针的一段, 计算曲线积分

$$I = \int_L \frac{ydx - (x-1)dy}{3(x-1)^2 + 4y^2}.$$

13. 求函数  $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$  的极值。

14. 计算  $\iint_{\Sigma} |x|y^2zdydz + xy^3zdzdx + |y|xz^2dxdy$ , 其中  $\Sigma$  为曲面  $z = x^2 + y^2$  ( $z \leq 1$  部分) 的外侧。

15. 已知封闭曲面  $S$  的方程为:  $|x| + |y| + |z| = 1$ , 其面密度函数  $\rho = |x| + |z| + \frac{1}{3}z$ , 求曲面  $S$  的重心。

**二、附加题 (共 2 道题, 每小题 15 分, 注: 附加题不计入总分, 仅在前 15 题所得总分相同时, 名次由附加题决定)**

16. 求微分方程  $y'' + (e^y - 4x)y'^3 = 0$  的通解。

17. 设  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n e^x}{e^x + 1} dx$ ,

(1) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ ;

(2) 讨论  $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha I_n$  敛散性。