哈尔滨工程大学第十五届数学竞赛

考试科目: **数学竞赛(非专业大一组)**

一	1	2	3	4	5	6	7
分数							
	8	9	10	11	12	13	总分
分数							
二	14	15					
分数							总分

一、（共15道题，1-3题：每题10分；4-13题：每题12分，总计150分）

1. 设 $f''(0)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x - xf(x)}{x^3}=1$， 求 $f(0), f'(0), f''(0)$ 的值。

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+\frac{1}{1}}+\dfrac{\ln(1+\frac{2}{n})}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\ln(1+\frac{n}{n})}{n+\frac{1}{n}}\right]$。

3. 已知区域 D： $x^2+y^2\le 1$，计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{(x+1)^2+xy^5}{\sqrt{1+x^2+y^2}}d\sigma$ 。

4. 已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}} & x<0\\ \dfrac{xe^x}{(x+1)^2} & x\ge 0\end{cases}$ ，求 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$ 在 $x\ge -1$ 时的表达式。

5. 判断方程 $\dfrac{1}{x-a_1}+\dfrac{1}{x-a_2}+\cdots+\dfrac{1}{x-a_n}=0(a_1<a_2<\cdots<a_n)$ 实根个数及分别属于的区间（注：要求写出过程）。

6. 区域 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0$，计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega (x+z)^2 dv$ 。

7. 已知函数 $f(u,v)$ 有连续的一阶偏导，且 $f(1,1)=1, f_u'(1,1)=2, f_v'(1,1)=3$ ，求曲面 $z=xf(2x-y,3y-2x)$ 在 $(1,1,1)$ 点处沿 xoy 平面上曲线 $x^2+2y^2=3$ 在 $(1,1)$ 点外法线方向上的方向导数。

8. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导，在 (a,b) 内二阶可导， $f(a)=f(b)=0$， $f'(a)f'(b)>0$，证明：

（1） $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$；

（2） $\exists\eta\in(a,b)$，使 $f''(\eta)=f(\eta)$。

9. 已知 $A(1,0,0)$ 与 $B(0,1,1)$，线段 AB 绕 z 轴旋转一周所围成的旋转曲面为 s. 求由 s 及两平面 $z=0,z=1$ 所围的立体体积。

10. 已知 L 为 $y=16-x^4$ 上从 $A(-2,0)$ 到 $B(2,0)$ 顺时针的一段，计算曲线积分 $I=\int_L \dfrac{ydx-(x-1)dy}{3(x-1)^2+4y^2}$。

11. 求函数 $z=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极值。

12. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}|x|y^2zdydz+xy^3zdzdx+|y|xz^2dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$（$z\le1$）的外侧。

13. 已知封闭曲面 S 的方程为：$|x|+|y|+|z|=1$，其面密度函数 $\rho=|x|+|z|+\dfrac{1}{3}z$，求曲面 S 的重心。

二、附加题（共 2 道题，每小题 15 分，注：附加题不计入总分，仅在前 13 题所得总分相同时，名次由附加题决定）

14. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，Σ 为 $(x-1)^2+y^2+z^2=4$ 的外侧，求 $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{r^3}$。

15. 设 $\varphi(x)$ 有连续的一阶导数，$\varphi(1)=1$，且对任意包围坐标原点的分段光滑的正向闭曲线 L，有 $\oint_L \dfrac{xdy-ydx}{\varphi(x)+y^2}\equiv A$（$A$ 为常数），证明对任意上半平面 $(y>0)$ 内正向分段光滑闭曲线 C，有 $\oint_C \dfrac{xdy-ydx}{\varphi(x)+y^2}=0$ 并求 $\varphi(x)$。