

2008 年湖南省大学生数学竞赛试题（数学专业类）

1. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\tan x}{x}$ 。

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$, 当 $xy = 0$ 时, 求 $f''_{xy}(x, y)$ 。

3. 计算三重积分 $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (x^2 - x^2y + xy + y^2) dx dy dz$ 。

4. 计算第一型曲线积分 $\int_{\Gamma} y^2 ds$, 其中 Γ 为下列方程组确定的曲线

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + z = a. \end{cases} (a > 0).$$

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近可微。 $f(0)=0, f'(0)=a$ 。定义数列

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right).$$

证明 $\{x_n\}$ 有极限并求其值。

6. 设 $f(x)$ 是实系数多项式。

(1) 证明: x_0 是 $f(x)$ 的一个重根当且仅当 $f(x_0) = f'(x_0) = 0$ 。

(2) 若 $2x^3 + 3x^2 - 12x + a = 0$ 有重根, 试确定常数 a 。

(3) 设 $p(x), q(x)$ 均为多项式。证明: 若 $\frac{p(x)}{q(x)}$ 有极值, 则存在常数 λ 使得 $p(x) - \lambda q(x)$ 有

重根。

(4) 上述逆命题是否成立? 若成立, 给出证明; 若不成立, 举出反例。

7. 证明函数 $x, \sin x, e^x$ 在任意区间上是线性无关的。

8. (1) 假设连续可微函数 $f(x)$ 满足微分不等式 $m \leq f(x) + f'(x) \leq M, x \in I$, 其中 m, M

时常数, I 是区间。证明: 存在常数 C_1, C_2 , 使得 $m + C_1 e^{-x} \leq f(x) \leq M + C_2 e^{-x}, x \in I$ 。

(2) 如果二次连续可微函数 $f(x)$ 满足微分不等式 $m \leq f''(x) + 2f'(x) + f(x) \leq M, x \in I$,

其中 m, M 为常数, I 是区间。试对 $f(x)$ 给出类似结论 1 的估计式 (不需要证明过程)。

9. 设 V 是数域 Ω 上向量空间, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ 是 V 中一组线性无关的向量,

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{u}_i \mid \sum_{i=1}^n a_i = 0, a_i \in \Omega \right\}$$

证明 T 是 V 的子空间, 且 $\dim T = n-1$ 。

10. 设 A 是半正定矩阵, 证明存在唯一一个半正定矩阵 B 使得 $A = B^2$ 。