2008 年湖南省大学生数学竞赛试题（非数学类）

1．计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$。

2．设$f(x)=\begin{cases} x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}, xy\neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad xy=0\end{cases}$，当$xy=0$时，求$f''_{xy}(x,y)$。

3．计算二重积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1}(2x^2+x^2y+x+y-y^2)dxdy$。

4．讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}(a>0)$的敛散性。

5.（1）假设连续可微函数$f(x)$满足微分不等式$m\leq f(x)+f'(x)\leq M, x\in I$，其中$m,M$时常数，$I$是区间。证明：存在常数$C_1,C_2$，使得$m+C_1e^{-x}\leq f(x)\leq M+C_2e^{-x}, x\in I$。

（2）如果二次连续可微函数$f(x)$满足微分不等式$m\leq f''(x)+2f'(x)+f(x)\leq M, x\in I$，其中$m,M$时常数，$I$是区间。试对$f(x)$给出类似结论 1 的估计式（不需要证明过程）。

6．设有一小山，取它的底面所在的平面为 Oxy 坐标面，其底部所占的区域为$D=\{(x,y)\mid x^2-xy+y^2\leq 75\}$，小山的高度函数为$h(x,y)=75-x^2+xy-y^2$。

（1）设$M(x_0,y_0)$为区域 D 上一点，问$h(x,y)$在该点沿平面上什么方向的方向导数最大？若记此方向导数的最大值为$g(x_0,y_0)$，试写出$g(x_0,y_0)$的表达式。

（2）现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点。也就是说，要在 D 的边界线$x^2-xy+y^2=75$上找出使得（1）中的$g(x,y)$达到最大的点。试确定攀登起点的位置。

7．设$f(x)$是实系数多项式。称x_0是$f(x)$的一个重根，如果存在多项式$g(x)$，使得$f(x)=(x-x_0)^2g(x)$。

（1）证明：x_0是$f(x)$的一个重根当且仅当$f(x_0)=f'(x_0)=0$。

（2）若$2x^3+3x^2-12x+a=0$有重根，试确定常数a。

（3）设 $p(x),q(x)$ 均为多项式。证明：若 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ 有极值，则存在常数 λ 使得 $p(x)-\lambda q(x)$ 有重根。

（4）上述逆命题是否成立？若成立，给出证明；若不成立，举出反例。

8．设线性方程组 $(I)\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+ax_2+3x_3=0, \\ x_1+a^2x_2+9x_3=0, \end{cases}$ 与 (II) $x_1+3x_2+3x_3=a-3$ 有公共解，求 a 的值和所有的公共解。

9．设二维随机向量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} 1, 0<x<1, 0<y<2x, \\ 0, 其它 \end{cases}$。求：

（1）(X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$。

（2）$Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$。

（3）$P\left\{Y\le\dfrac{1}{2}\,|\,X\le\dfrac{1}{2}\right\}$。

10．假设总体 X 在区间 $(0,\theta)$ 上服从均匀分布 $(\theta>0)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，记 $X_{(n)}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$。

（1）求 $X_{(n)}$ 的分布函数 $F_{(n)}(x)$、密度函数 $f_{(n)}(x)$；θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_1$，极大似然估计量 $\hat{\theta}_2$。

（2）求 C_n，使得 $[X_{(n)},C_nX_{(n)}]$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间。

（3）若对检验问题 $H_0:\theta=2, H_1:\theta<2$，取 H_0 的拒绝域 $C=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):x_{(n)}\le1.5\}$，求犯第一类错误的概率 α。