2007 年湖南省大学数学竞赛模拟试卷

一、解答下列各题（每小题 6 分，共 18 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{n+(2n+1)}\right)$.

2. 设函数 $z=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，试求常数 a 的值，使得变换 $\begin{cases}u=x+2y,\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

3. 已知 Σ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧，计算

$$\oiint\limits_{\Sigma}(x+1)^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

二、证明下列各题（每小题 8 分，共 16 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内三阶可导，且 $f(x)$ 和 $f'''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，证明 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

2. 设在 $(-\infty,+\infty)$ 内，函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=f(x)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 单调减少，证明：$f(x)\equiv 0$.

三、（10 分） 已知 $a_n=\int_{-1}^{1}\dfrac{x^{2n}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$，$n=0,1,2,\cdots$，求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ 的和.

四、（10 分） 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，$\Omega(t)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2\le t^2, z\ge 0\}$，$S(t)$ 是 $\Omega(t)$ 的表面，$D(t)$ 是 $\Omega(t)$ 在 xoy 平面的投影区域，$L(t)$ 是 $D(t)$ 的边界曲线，已知当 $t\in(0,+\infty)$ 时，恒有：

$$\oint_{L(t)}f(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s+\oiint\limits_{S(t)}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma+\iiint\limits_{\Omega(t)}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v,$$

求 $f(t)$ 的表达式.

五、（10 分） 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶对称矩阵，求二次型函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ ,$$

在$\mathbb{R}^n$上的单位球面$S:x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$上的最大值与最小值.

六、(10分) 设$\begin{cases}x_n=2x_{n-1}-y_{n-1},\\ y_n=\dfrac{3}{2}x_{n-1}-\dfrac{1}{2}y_{n-1},\end{cases}$ 且$x_0=-1,y_0=1$，试求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

七、(10分) 设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为n阶方阵，$\mathbf{E}$为n阶单位矩阵，

（1）证明：$\begin{vmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{E}\\ \mathbf{E} & \mathbf{B}\end{vmatrix}=|\mathbf{AB}-\mathbf{E}|$；

（2）若$\mathbf{E}-\mathbf{AB}$可逆，证明$\mathbf{E}-\mathbf{BA}$也可逆.

八、(8分) 设(X,Y)在边长为1的正方形内服从均匀分布，该正方形的中心在坐标原点，对角线在坐标轴上.

（1）求(X,Y)的联合密度$f(x,y)$；

（2）求X与Y的边缘密度$f_X(x)$, $f_Y(y)$；

（3）求条件密度$f_{Y|X}(y|x)$；

（4）求$D(X+Y)$.

九、(8分) 设有A,B两物体，其重量μ_1,μ_2未知. 用一台天平对物体A独立称量n_1次，其结果为$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$，用同一台天平对物体B独立称量n_2次，结果为$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$，称重时，天平有随机误差ε，且$\varepsilon\sim N(0,\sigma^2)$.

（1）求μ_1,μ_2和σ^2的极大似然估计$\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2$和$\hat{\sigma}^2$；

（2）求估计量$\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2$和$\hat{\sigma}^2$的均值，它们是否为无偏估计？

（3）设显著性水平为α，给出$H_0:\mu_1=\mu_2\ \ vs\ \ H_1:\mu_1\neq\mu_2$的检验方法.