湖南省2007年大学生数学竞赛试题（数学专业）

数学分析部分，共 60 分

一、（10分）设 $\{a_n\}$ 表示通项只能取 1 或 -1 的序列，$n=1,2,\cdots$.

(1) 证明对任意 $l\in[-1,1]$，存在序列 $\{a_n\}$ 使得 $l=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{2^n}$.　　（5分）

(2) 对于哪些 $l\in[-1,1]$，问题 (1) 中的序列 $\{a_n\}$ 是唯一的？　　（4分）

(3) 当 $l=\frac{1}{8}$ 时，请写出其表达式.　　（1分）

二、（10分）设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$. 试求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2\ln n}}.$$

三、设多项式 $P(x)$ 有且仅有 n 个互不相同且大于 1 的零点，证明

$$Q(x)=(x^2+1)P(x)P'(x)+x\left((P(x))^2+(P'(x))^2\right)$$

至少存在 $2n-1$ 个互不相同的零点.（10分）

四、（10分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，积分 $\int_0^{+\infty}\phi(x)dx$ 绝对收敛，试证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}f\left(\frac{x}{n}\right)\phi(x)dx=f(0)\int_0^{+\infty}\phi(x)dx.$$

五、（每小题 5 分，共 10 分）设 $a>0$，计算下列积分

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\sin x^2dx$

六、（每小题 5 分，共 10 分）设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续周期函数，令

$$g(x)=\frac{1}{h^2}\iint\limits_{\substack{|u|\le h/2\\|v|\le h/2}}f(x+u+v)dudv,\qquad(h>0).$$

证明：(1) $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ 也是周期函数，且与 $f(x)$ 的周期相同.

(2) $g(x)$ 二阶连续可导，且 $\|g-f\|\le\omega_2(f,h)$，其中

$$\begin{aligned}\|g-f\|&=\max_{x\in\mathbb{R}}|g(x)-f(x)|\\ \omega_2(f,h)&=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\0<\delta\le h}}|f(x+\delta)+f(x-\delta)-2f(x)|\end{aligned}$$

高等代数部分，共 40 分

七、（10 分）计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a & a \\ b & x_2 & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & x_{n-1} & a \\ b & b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}$$

八、（第 1 小题 6 分，第 2 小题 4 分）若 A 为 n 阶实幂等阵，即满足 $A^2 = A$. 证明

(1) $tr(A) = rk(A)$, (2) A 幂等 $\Longleftrightarrow rk(A) + rk(I - A) = n$.

九、（每小题 5 分，共 10 分）设 A 和 B 分别为 $m \times n$ 和 $s \times n$ 的行满秩实矩阵，$Q = AB'(BB')^{-1}BA'$. 证明

(1) $AA' - Q$ 为半正定矩阵， (2) $0 \le |Q| \le |AA'|$.

十、（10 分）设数域 F 上的二次多项式 $f(x)$ 在 F 内有互异根 x_1, x_2， σ 是数域 F 上线性空间 L 上的一个线性变换， $\sigma \neq x_i I$, $i = 1, 2$, 且满足 $f(\sigma) = 0$，这里 I 为单位变换. 证明 x_1, x_2 是 σ 的特征值，且 L 可分解为 x_1 与 x_2 的特征子空间的直和.

注：$\boldsymbol{tr(A)}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹，$\boldsymbol{rk(A)}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩， $\boldsymbol{A'}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵。