湖南省 2006 年大学生数学竞赛试题

（B 组：非数学专业）

湖南省数学会

B-1. 设 $f(x,y)=2e^{x^2y}-e^x-e^{-x}$.

(1) 求 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)}{x^2}$.

(2) 证明：当 $x\in(-\infty,+\infty), y\in[\frac{1}{2},+\infty)$ 时， $f(x,y)\geq 0$.

(3) 证明：当 $y<\frac{1}{2}$ 时，不可能对所有实数 $x, f(x,y)\geq 0$. （**10** 分）

B-2. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数，其和为 1. 对于每个自然数 i，用 n_i 表示满足 $2^{1-i}\geq a_k>2^{-i}$ 的 a_k 的个数. 证明不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n_i}{2^i}}\leq\sqrt{\log_2 n}+\sqrt{2}.$$ （**10** 分）

B-3. 定义 $P=[0,1]\times[0,1]$ 上的函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x(1-y) & 当\ x\leq y;\\ y(1-x) & 当\ x>y.\end{cases}$$

求 $f(x,y)$ 在 P 上的最大值和最小值.（**10** 分）

B-4. 求曲面 $z^2=x^2+y^2$ 夹在两个曲面 $4x^2+y^2=y$ 和 $4x^2+y^2=2y$ 之间的那部分的面积.（**10** 分）

B-5. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的系数满足关系式 $a_{n+2}+c_1a_{n+1}+c_2a_n=0(n\geq 0)$, 其中 c_1,c_2 是常数. 若 $a_0=1,a_1=-7,a_2=-1,a_3=-43$, 求 a_n 的一般表达式，并求幂级数的收敛半径及级数的和.（**10** 分）

B-6. 已知微分方程 (其中 $y=y(x)$)

$$y''+(x+e^{2y})(y')^3=0,$$

若视 x 为 y 的函数，证明 $x=c_1e^y+c_2e^{-y}+\frac{1}{3}e^{2y}$, 其中 c_1,c_2 为任意常数.（**10** 分）

B-7. 证明：如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足条件

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^k=0\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

那么只能 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.（**10** 分）

B-8. 求 a 使得 0 是矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{pmatrix}$$

的一个特征值. 并对 a 的这个值求出 A 的全部特征值及相应的特征向量.（**10** 分）

B-9. 设连续型二维随机向量 (X,Y) 在由 $x=0,y=0,y=4$ 和 $y=-\frac{4}{3}x+8$ 所围成的区域内服从均匀分布.

(1) 求 (X,Y) 的联合密度.

(2) 求 X 与 Y 各自的边缘密度.

(3) 求 Y 关于 X 的条件密度.

(4) 求 X 与 Y 的协方差. （**10** 分）

B-10. 考虑如下回归模型

$$Y_i=m+\epsilon_i,\quad i=1,\cdots,n,$$

其中 $\{\epsilon_i\}$ 为独立同分布误差，服从 $N(0,\sigma^2)$ 分布， m 和 $\sigma^2>0$ 是未知参数.

(1) 求未知参数 m 和 σ^2 的极大似然估计 $\hat{m}_L$ 和 $\hat{\sigma}_L^2$.

(2) 求参数 m 和 σ^2 的极大似然估计 $\hat{m}_L$ 和 $\hat{\sigma}_L^2$ 的均值.

(3) 叙述对立假设 $H_0:m=m_0,H_1:m\neq m_0$ 的检验方法.（**10** 分）