准考证号________ 姓名________ 专业________ 学校________

2005年浙江省大学生高等数学（微积分）竞赛试题

（数学类）

题 号	一	二	三	四	五	六	总分
得 分							
评卷人							

一、计算题（每小题12分，满分60分）

得分	

1．计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t\ln(1+t)dt-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{8}}{(x-\sin x)(e^{x^2}-1)}$

得分	

2．计 $\int\dfrac{\sin x}{3\cos x+4\sin x}dx$

得分	

3．计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{1+\tan^{2005}x}$

得分	

4．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 点二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=1$，求 $f(0)$，$f'(0)$ 和 $f''(0)$ 的值。

得分	

5．设 $z=f(x-y,x+y)+g(x+ky)$，f,g 具有二阶连续偏导数，且 $g''\neq 0$，如果 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\equiv 4f''_{22}$，求常数 k 的值。

二、（本题满分 20 分）

得分	

在某平地上向下挖一个半径为 R 的半球形池塘，若某点泥土的密度为 $\rho=e^{\frac{r^2}{R^2}}$，其中 r 为此点离球心的距离，试求挖此池塘需作的功。

三、（本题满分 20 分）

得分	

判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{[\sqrt{n}]}\cdot\frac{1}{n}$ 的收敛性

四、（本题满分 20 分）

得分	

证明对任意连续函数 $f(x)$，有

$$\max\{\int_{-1}^{1}|x-\sin^2 x-f(x)|\,dx,\quad \int_{-1}^{1}|\cos^2 x-f(x)|\,dx\}\geq 1$$

五、（本题满分 15 分）

得分	

对下列函数 $f(x)$，分别说明是否存在一个区间 $[a,b]$，$(a>0)$，使 $\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=\{x\mid x\in[a,b]\}$，并说明理由。

（1）$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$　　（2）$f(x)=\frac{1}{x}$　　（3）$f(x)=1-\frac{1}{x}$

六、（本题 15 分）

得分	

设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二阶导数连续，证明 $\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\frac{2}{3}f'(\xi)+\frac{1}{3}\xi f''(\xi)$。