

## 2003年天津市大学数学竞赛试题（经济管理类）

一. 填空(本题15分, 每空3分. 请将最终结果填在相应的横线上面)

1. 设对一切实数 $x$ 和 $y$ , 恒有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ , 且知 $f(\sqrt{2}) = 1$ , 则 $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) =$ \_\_\_\_\_

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt, & x \neq 0 \\ e^{2x^2} - 2e^{x^2} + 1, & x = 0 \end{cases}$ , 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ \_\_\_\_\_

3. 设 $f(x, y, z) = e^x yz^2$ , 其中 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x + y + z + xyz = 0$ 所确定的隐函数, 则 $f_y'(0, 1, -1) =$ \_\_\_\_\_

4.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} =$ \_\_\_\_\_

5. 设 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = kt^2 \end{cases}$ , 其中 $\varphi(t)$ 具有二阶导数, 则 $\frac{d^2x}{dy^2} =$ \_\_\_\_\_

二. 选择题(本题15分, 每小题3分. 每各小题的四个选项中仅有一个是正确的, 把你认为“正确选项”前的字母填在括号内. 选对得分; 选错、不选或选出的答案多于一个, 不得分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量

(1)  $\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}$                       (2)  $\sqrt{1 + 2x} - \sqrt[3]{1 + 3x}$

(3)  $x - (\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos x) \sin x$                       (4)  $e^{x^4-x} - 1$

从低阶到高阶的排列顺序为 ( )

(A) (1),(2),(3),(4)      (B) (3),(1),(2),(4)      (C) (4),(3),(2),(1)      (D) (4),(2),(1),(3)

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{arc} \cot x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 在 $x=0$ 处存在最高阶导数的阶数为 ( )

(A) 1阶                      (B) 2阶                      (C) 3阶                      (D) 4阶

3. 设函数 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处又连续的导函数, 又 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = 2$ , 则 $x=1$ 是 ( )

- (A) 函数 $y = f(x)$ 的极大值点;                      (B) 函数 $y = f(x)$ 的极小值点;  
(C) 曲线 $y = f(x)$ 拐点的横坐标;                      (D) 以上答案均不正确.

4. 设函数 $f, g$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) < f(x) < m$  ( $m$ 为常数), 则曲线 $y = g(x), y = f(x), x = a$ 和 $x = b$ 所围平面图形绕直线 $y = m$ 旋转而成的旋转体体积为 ( )

(A)  $\pi \int_a^b [2m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)] dx;$

(B)  $\pi \int_a^b [2m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)] dx;$

(C)  $\pi \int_a^b [m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)] dx;$

$$(D) \pi \int_a^b [m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)] dx.$$

5. 设  $f(u)$  是关于  $u$  的奇函数,  $D$  是由  $x=1, y=-x^3, y=1$  所围成的平面区域, 则  $\iint_D [x^3 + f(xy)] dx dy =$

(A) 0; (B) 1/4; (C) 2/7; (D)  $\iint_D f(xy) dx dy.$

三. (6分)  $a, b, c$  为何值时, 下式成立  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x - cx} \int_b^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} = c$

四. (6分) 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x) - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ , 其中  $\varphi(x)$  具有连续的二阶导函数, 且  $\varphi(0) = 1$ .

(1) 确定  $a$  的值, 使  $f(x)$  在点  $x=0$  处可导, 并求  $f'(x)$ .

(2) 讨论  $f'(x)$  在点  $x=0$  处的连续性.

五. (6分) 设正值函数  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上连续, 求函数

$$F(x) = \int_1^x \left[ \left( \frac{2}{t} + \ln t \right) - \left( \frac{2}{t} + \ln t \right) \right] f(t) dt$$
 的最小值点.

六. (6分) 设  $y'(x) = \arctan(x-1)^2$ , 且  $y'(0) = 0$ , 求  $\int_0^1 y(x) dx$ .

七. (7分) 设变换  $\begin{cases} u = x + a\sqrt{y} \\ v = x + 2\sqrt{y} \end{cases}$ , 把方程  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  化为  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$

试确定  $a$ .

八. (7分) 计算  $I = \int_0^{a \sin \varphi} e^{y^2} dy \int_{\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{b^2 - y^2}} e^{x^2} dx + \int_{a \sin \varphi}^b e^{y^2} dy \int_{y \tan \varphi}^{\sqrt{b^2 - y^2}} e^{x^2} dx$  其中

$0 < a < b, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , 且  $a, b, \varphi$  均为常数.

九. (8分) 设函数  $f(x)$  具有连续的二阶导数, 且  $f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) > 0$ . 在曲线  $y = f(x)$  上任

意取一点  $(x, f(x)) (x \neq 0)$  作曲线的切线, 此切线在  $x$  轴上的截距记作  $\mu$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(\mu)}{\mu f(x)}$ .

十. (7分) 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 在开区间  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1$ . 试证明: 对于任意给定的正数  $a$  和  $b$ , 在开区间  $(0, 1)$  内存在不同的  $\xi$  和  $\eta$ ,

$$\text{使得 } \frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b.$$

十一. (7分) 设  $F(x) = -\frac{1}{2}(1 + e^{-1}) + \int_{-1}^1 (x-t)e^{-t^2} dt$ . 试证明在区间  $[-1, 1]$  上  $F(x)$  有且仅有两个实根.

十二. (8分) 设函数  $f(x, y)$  在单位圆域上有连续的偏导数, 且在边界上的值恒为零. 证明:

$$f(0,0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\pi} \iint_D \frac{x f'_x + y f'_y}{x^2 + y^2} dx dy, \text{ 其中: } D \text{ 为圆域 } \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$