

一、填空题:(每小题3分)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{4}} - 1}{\cos x - 1} = 1$, 则 $a =$ _____ .

2. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} - \cos(xy) = 0$ 所确定, 则 $dy|_{x=0} =$ _____ .

3. 由曲线 $y = -x^3 + x^2 + 2x$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $A =$ _____ .

4. 设 E 为闭区间 $[0, 4\pi]$ 上使被积函数有定义的点的集合, 则 $\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx =$ _____ .

5. 设 L 是顺时针方向的椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 其周长为 l , 则 $\oint_L (xy + x^2 + 4y^2) ds =$ _____ .

二、选择题:(每小题3分)

1. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$ 且 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 则 ()

(A) $\lim_{u \rightarrow u_0} f[\varphi(x)]$ 存在; (B) $\lim_{u \rightarrow u_0} f[\varphi(x)] = A$;

(C) $\lim_{u \rightarrow u_0} f[\varphi(x)]$ 不存在; (D) A, B, C 均不正确.

2. 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin x^2 dx$, $g(x) = x^3 + x^4$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, ()

(A) $f(x)$ 与 $g(x)$ 为同阶但非等价无穷小; (B) $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小;

(C) $f(x)$ 是比 $g(x)$ 更高阶的无穷小; (D) $f(x)$ 是比 $g(x)$ 更低阶的无穷小.

3. 设函数 $f(x)$ 对于任意 x 都满足 $f(x+1) = af(x)$, 且 $f'(0) = b$, 其中 a, b 均为非零常数, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处 ()

(A) 不可导; (B) 可导, 且 $f'(1) = a$;

(C) 可导, 且 $f'(1) = b$; (D) 可导, 且 $f'(1) = ab$.

4. 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x)$ 不恒为零, $I = t \int_0^t f(tx) dx$, 其中 $s > 0, t > 0$, 则 I 的值 () .

(A) 与 s 和 t 有关; (B) 与 s, t 及 x 有关;

(C) 与 s 无关, 与 t 有关; (D) 与 s 有关, 与 t 无关.

5. 设 $u(x, y)$ 在有界闭区域 D 上具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} > 0$, 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则 () .

(A) $u(x, y)$ 的最大值点和最小值点都在区域 D 的内部;

(B) $u(x, y)$ 的最大值点和最小值点都在区域 D 的边界上;

(C) $u(x, y)$ 的最大值点在区域 D 的内部, 最小值点在区域 D 的边界上;

(D) $u(x, y)$ 的最小值点在区域 D 的内部, 最大值点在区域 D 的边界上.

三、(6分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2 [2x + \ln(1-2x)]}$

四、(6分) 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$

五、(6分) 设函数 $u(x, y)$ 的所有二阶偏导数都连续, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 且 $u(x, 2x) = x$, $u'_1(x, 2x) = x^2$, 求

$$u''_{11}(x, 2x).$$

六、(7分) 在具有已知周长 $2P$ 的三角形中, 怎样的三角形的面积最大?

七、(8分) 计算 $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{y}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{\frac{x}{y}} dx$

八、(7分) 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^3 + az^2) dydz + (y^3 + ax^2) dzdx + (z^3 + ay^2) dxdy$,

其中 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧.

九、(8分) 已知 $a > 0, x_1 > 0$, 定义 $x_{n+1} = \frac{1}{4}(3x_n + \frac{a}{x_n^3})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其值.

十、(7分) 证明不等式 $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, x \in (-\infty, +\infty)$.

十一、(7分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 且 $4 \int_{\frac{3}{4}}^1 f(x) dx = f(0)$, 求证: 开区

间 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$.

十二、(8分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有二阶导数, 且 $|f(x)| \leq M_0, 0 < |f''(x)| \leq M_2, (a \leq x < +\infty)$.

证明 $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.