竞赛之窗

陕西省第四次大学生高等数学竞赛 (复赛)试题(附答案)

2001 年 10 月 13 日 上午 9: 00—12: 00

一、(10 分)求 $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)\Big|_{x=0}\quad(n>1)$ [$=\begin{cases}0, & \text{当 } n \text{ 为偶数}\\ -n!, & \text{当 } n \text{ 为奇数}\end{cases}$

二、(10 分)设函数 $\varphi(x)$、$f(x)$ 有一阶连续导数,且 $f'(x)>0$,又函数 $z(x,y)=f[x+\varphi(y)]$ 满足方程 $\varphi(y)\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$,求 $\varphi(y)$. [$=Ce^y$

三、(10 分)计算 $I=\int\frac{1}{1+k\cos x}dx$,$k$ 为非零常数.

[当 $|k|>1$ 时,$I=\frac{1}{k-1}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}+\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$;当 $0<|k|<1$ 时,$I=\frac{2}{\sqrt{1-k^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$;当 $k=\pm1$ 时,$I=\pm\csc x\pm\cot x+C$,

四、(10 分)设 $x_{n+1}=\frac{1}{4}\left(3x_n+\frac{81}{x_n^3}\right)(n=0,1,2,\cdots)$,其中 $x_0>0$.

(1) 证明 $x_n\geqslant3(n=1,2,\cdots)$.

(2) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求 $\lim_{n\to\infty}x_n$. [$=3$

五、(10 分)求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ 的收敛域与和函数。

[$(-1,1)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x), & 0<|x|<1\\ 0, & x=0\end{cases}$

六、(10 分)计算曲面积分 $\iint_S 2(1-x^2)dydz+y(8x+1)dzdx-4xzdxdy$. 其中 S 是由弧段 $\begin{cases}z=\sqrt{x-1}\\ y=0\end{cases}(1\leqslant x\leqslant3)$ 绕 x 轴旋转一周的旋转曲面,S 的法向量 $\vec{n}$ 与 ox 轴的夹角大于 $\frac{\pi}{2}$. [$=34\pi$

七、(10 分)设曲线 C 为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与曲面 $x^2+y^2=ax(z\geqslant0,a>0)$ 的交线,从 ox 轴的正向看过去为逆时针方向。

(1) 写出曲线 C 的参数方程; [C: $x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t$, $y=\frac{a}{2}\sin t$, $z=a\sin\frac{t}{2}$, t 从 0 变到 2π

(2) 计算曲线积分 $\int_C y^2dx+z^2dy+x^2dz$. [$=-\frac{\pi}{4}a^3$

八、(10 分)子弹以速度 $v_0=400\text{m/s}$ 垂直打进厚为 20cm 的墙壁,穿透后以 100m/s 的速度飞出。设墙壁对子弹运动的阻力与速度平方成正比,求子弹穿过墙壁的时间。[$=\frac{3}{4000\ln2}(\text{s})$

九、(10 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-\delta,\delta](\delta>0)$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-\delta)=-\delta, f(\delta)=\delta, f'(0)=0$。证明在开区间 $(-\delta,\delta)$ 内至少存在一点 ξ, 使 $\delta^2 f'''(\xi)=6$。

十、(10 分) 设函数 $u=u(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数, 且满足关系

$$\frac{u_x'}{x}=\frac{u_y'}{y}=\frac{u_z'}{z} \qquad (*)$$

(1) 证明在球坐标下, u 仅依赖于 ρ, 而与 θ 和 φ 无关, 即 $\frac{\partial u}{\partial\theta}=0$ 及 $\frac{\partial u}{\partial\varphi}=0$;

(2) 若函数 u 除满足关系(*)外, 还满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

试求 $u(x,y,z)$ 的表达式。[$=\frac{c_1}{\rho}+c_2=\frac{c_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+c_2$

十一、(10 分) 一个底半径为 1 尺, 高为 6 尺的开口圆柱形水桶, 在高出水桶底面的 2 尺处, 有两个小孔, 两小孔的连线与水桶轴线相交, 问该桶最多能盛多少水而不漏水? [$=\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{3}\pi$

十二、(10 分) 设 $x\geqslant 0$, 试证明不等式:

$$\int_0^x (2t-t^2)\sin^2 t\,dt\leqslant\frac{8}{5}$$

(上接第 26 页)

$\frac{1}{t}\leqslant\frac{t+1}{2t\sqrt{t}}$ 即 $0\leqslant(\sqrt{t}-1)^2$

例 3 设 n 为整数, 证明 $e^x>(1+\frac{x}{n})^x(x>0)$

证 在原不等式两边同时取对数恒等变形为 $\ln(1+\frac{x}{n})<\frac{x}{n}(x>0)$, 也即等价于

$$\int_1^{1+\frac{x}{n}}\frac{1}{t}dt<\int_1^{1+\frac{x}{n}}dt$$

这是显然成立的, 因为积分变量 t 满足 $1<t<1+\frac{x}{n}(x>0)$, 从而 $\frac{1}{t}<1$。

例 4 设 $b>a>0$, 证明 $\frac{2(b-a)}{b+a}<\ln\frac{b}{a}$

证 $\because \ln\frac{b}{a}=\int_1^{\frac{b}{a}}\frac{1}{t}dt, \frac{2(b-a)}{b+a}=\frac{2(\frac{b}{a}-1)}{\frac{b}{a}+1}=\int_1^{\frac{b}{a}}\frac{4}{(1+t)^2}dt$

因此原不等式等价于 $\int_1^{\frac{b}{a}}\frac{4}{(1+t)^2}dt<\int_1^{\frac{b}{a}}\frac{1}{t}dt$, 这也是显然成立, 因为 $1<t<\frac{b}{a}$, 从而 $0<(t-1)^2$, 即 $\frac{4}{(1+t)^2}<\frac{1}{t}$ 成立。

从上面的例子可知利用积分法证明不等式的要点是把代数不等式转化成积分不等式, 并且注意不等式两边的积分限要相同, 上限要大于下限, 主要技巧体现在积分上、下限的选择。

能用积分法证明的不等式很多, 在这里仅举四例, 起一个抛砖引玉的作用。

· 封底照片说明· 封底右下角照片, 由吴凡、冯虎摄像提供, 其他照片由张肇炽摄。

· 上期封底照片说明· 上期(总第 89 期) 封底照片, 由王慧娟摄像提供, 特此补充说明, 并向王女士致歉。