

首届全国大学生数学竞赛决赛试卷

(数学类, 2010)

一、 填空题

(1) 设 $\beta > \alpha > 0$, 则 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx =$ _____.

(2) 若关于 x 的方程 $kx + \frac{1}{x^2} = 1 (k > 0)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有惟一实数解, 则常数 $k =$ _____.

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续. 由积分中值公式有 $\int_a^x f(t) dt = (x-a)f(\xi)$ ($a \leq \xi \leq x < b$). 若导数 $f'_+(a)$ 存在且非零, 则 $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{\xi - a}{x - a}$ 的值等于_____.

(4) 设 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 6$, 则 $((\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c})) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) =$ _____.

二、 设 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有定义, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}.$$

三、 设 $f(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上一致连续, 且对于固定的 $x \in [0, \infty)$, 当自然数 $n \rightarrow \infty$ 时 $f(x+n) \rightarrow 0$.

证明: 函数序列 $\{f(x+n): n=1, 2, \dots\}$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 0.

四、 设 $D = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$, $f(x, y)$ 在 D 内连续, $g(x, y)$ 在 D 内连续有界, 且满足

条件: (1) 当 $x^2 + y^2 \rightarrow 1$ 时, $f(x, y) \rightarrow +\infty$;

(2) 在 D 中 f 与 g 有二阶偏导数, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^f$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \geq e^g$.

证明: $f(x, y) \geq g(x, y)$ 在 D 内处处成立.

五、 设 $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$

$$R_\varepsilon = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1 - \varepsilon; 0 \leq y \leq 1 - \varepsilon\}.$$

考虑积分 $I = \iint_R \frac{dx dy}{1 - xy}$, $I_\varepsilon = \iint_{R_\varepsilon} \frac{dx dy}{1 - xy}$, 定义 $I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon$.

(1) 证明 $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$;

(2) 利用变量替换:
$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}(x+y) \\ v = \frac{1}{2}(y-x) \end{cases}$$
 计算积分 I 的值, 并由此推出 $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

六、已知两直线的方程: $L: x = y = z$, $L': \frac{x}{1} = \frac{y}{a} = \frac{z-b}{1}$. (1) 问: 参数 a, b 满足什么条件时, L 与 L' 是异面直线?

(2) 当 L 与 L' 不重合时, 求 L' 绕 L 旋转所生成的旋转面 π 的方程, 并指出曲面 π 的类型.

七、设 A, B 均为 n 阶半正定实对称矩阵, 且满足 $n-1 \leq \text{rank } A \leq n$. 证明: 存在实可逆矩阵 C 使得 $C^T A C$ 和 $C^T B C$ 均为对角阵.

八、设 V 是复数域 \mathbb{C} 上的 n 维线性空间, $f_j: V \rightarrow \mathbb{C}$ ($j=1, 2$) 是非零的线性函数, 且线性无关.

证明: 任意的 $\alpha \in V$ 都可表为 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, 使得

$$f_1(\alpha) = f_1(\alpha_2), \quad f_2(\alpha) = f_2(\alpha_1).$$