第九章　二次型

§9.3 正定性

本节讨论实数域 $\mathbb{R}$ 上的二次型.

定义 9.3.1 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$ 是实二次型.

(1) 如果对任意 $X = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \neq 0$, 都有

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = X^T AX > 0,$$

则称 A 为 **正定矩阵**, 称该二次型为 **正定二次型**;

(2) 如果对任意 $X = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \neq 0$, 都有

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = X^T AX \geq 0;$$

且存在 $X_0 = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \neq 0$, 使得 $X_0^T AX_0 = 0$, 则称 A 为 **半正定矩阵**, 称该二次型为 **半正定二次型**;

(3) 如果对任意 $X = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \neq 0$, 都有

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = X^T AX < 0,$$

则称 A 为 **负定矩阵**, 称该二次型为 **负定二次型**;

(4) 如果对任意 $X = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \neq 0$, 都有

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = X^T AX \leq 0;$$

且存在 $X_0 = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \neq 0$, 使得 $X_0^T AX_0 = 0$, 则称 A 为 **半负定矩阵**, 称该二次型为 **半负定二次型**;

(5) 若存在 $X_1 = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \neq 0$, 使得 $X_1^T AX_1 > 0$, 同时存在 $X_2 = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T \neq 0$, 使得 $X_2^T AX_2 < 0$, 则称 A 为 **不定矩阵**, 称该二次型为 **不定型**.

例 1

(1) $f(x_1, x_2 \cdots, x_n) = x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + nx_n^2$ 是正定二次型;

(2) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2$, 其中 $r \leq n$, 是半正定二次型;

(3) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2$ 是负定二次型;

(4) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_r^2$, 其中 $r \leq n$, 是半负定二次型;

(5) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ 是不定二次型.

由此可以看出，从二次型的标准形或规范形容易判断二次型的正定性.

命题 9.3.1 可逆线性替换不改变二次型的正定性.

证明 设二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 经过可逆线性替换 $X=CY$ 化为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX=Y^T(C^TAC)Y$. 因为 C 可逆，所以 $X\neq 0$ 当且仅当 $Y\neq 0$. 这样，二次型 X^TAX 和二次型 $Y^T(C^TAC)Y$ 是同型 (正定，或半正定，或负定，或半负定，或不定) 的二次型. □

定理 9.3.1 实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 正定的充分必要条件是 $p=n$;
实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 半正定的充分必要条件是 $p=r<n$;
实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 负定的充分必要条件是 $q=n$;
实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 半负定的充分必要条件是 $q=r<n$;
实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 不定的充分必要条件是 $p>0$ 且 $q>0$.

推论 9.3.1 设 A 是 n 阶实对称矩阵. 则下列命题等价.
(1) A 是正定阵;
(2) A 的特征值全大于零;
(3) A 合同于 n 阶单位阵 E;
(4) 存在 n 阶可逆阵 C, 使得 $A=C^TC$.

证明 A 正定的充分必要条件是 $p=n$, 而 $p=n$ 指的是 A 在合同下的标准形是 E. A 合同于 E 就是存在 n 阶可逆阵 C, 使得 $A=C^TEC=C^TC$. 另一方面，考虑 A 在正交相似下的标准形， A 的特征值全大于零的充分必要条件是 $p=n$. □

定义 9.3.2 设 A 是 n 阶矩阵， A 的 k 阶子式

$$A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{vmatrix}$$

称为 A 的一个 k **阶主子式**.

A 的 k 阶主子式

$$A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

称为 A 的 k **阶顺序主子式**.

定理 9.3.2 n 阶实对称阵 A 是正定阵的充分必要条件是它的 n 个顺序主子式全大于零.

证明 必要性. 对于给定的 k, $1\le k\le n$, 记

$$A=\begin{pmatrix} A_k & B_1 \\ B_1^T & B_2 \end{pmatrix}.$$

显然 k 阶顺序主子式 A_k 是 k 阶对称阵. 对于任意 $X_1\neq 0\in\mathbb{R}^k$, 令 $X=\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, 则 $X\neq 0$. 因为 A 正定，从而 $0<X^TAX=(X_1^T,0)\begin{pmatrix} A_k & B_1 \\ B_1^T & B_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}=X_1^TA_kX_1$. 由 X_1 的任意性，知 A_k 为正定阵，所以存在 k 阶可逆阵 C, 使得 $A_k=C^TC$, 故 $\det A_k=(\det C)^2>0$.

充分性. 对 n 做数学归纳法.

当 $n=1$ 时，结论显然成立.

设结论对于 $n-1$ 成立. 考虑 n 阶对称阵 A.

记
$$A=\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix},$$
其中 A_{n-1} 是 A 的第 $n-1$ 个顺序主子式, $\alpha\in\mathbb{R}^{n-1}$. 因为 A 的顺序主子式大于零, 所以 A_{n-1} 的所有顺序主子式也大于零. 由归纳假设, A_{n-1} 是正定阵. 所以 A_{n-1} 合同于 E_{n-1}, 即而存在 $n-1$ 阶可逆阵 C_1, 使 $C_1^TA_{n-1}C_1=E_{n-1}$. 令
$$C_2=\begin{pmatrix} C_1 & O \\ O & 1 \end{pmatrix},$$
则
$$C_2^TAC_2=\begin{pmatrix} C_1^T & O \\ O & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^T & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & O \\ O & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{n-1} & C_1^T\alpha \\ \alpha^TC_1 & a_{nn} \end{pmatrix},$$
再令
$$C_3=\begin{pmatrix} E_{n-1} & -C_1^T\alpha \\ O & 1 \end{pmatrix}$$
则
$$\begin{aligned} C_3^TC_2^TAC_2C_3 &= C_3^T\begin{pmatrix} E_{n-1} & C_1^T\alpha \\ \alpha^TC_1 & a_{nn} \end{pmatrix}C_3 \\ &= \begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ -\alpha^TC_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & C_1^T\alpha \\ \alpha^TC_1 & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{n-1} & -C_1^T\alpha \\ O & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_{n-1} & O \\ O & a_{nn}-\alpha^TC_1C_1^T\alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
因为 $\det A>0$, 所以 $a_{nn}-\alpha^TC_1C_1^T\alpha>0$. 故 A 是正定阵. □

例 2 求 a 的取值范围, 使
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+x_4^2+2x_1x_2+x_1x_3-2x_2x_3$$
为正定二次型.

解 由该二次型的矩阵是
$$A\begin{pmatrix} a & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
要使 A 为正定阵, A 的顺序主子式均需大于零. 考虑 $\det A_1=a>0$, $\det A_2=a^2-1>0$, $\det A_3=a^3-3a-2>0$, $\det A=a^3-3a-2>0$. 解得 $a>2$.

所以当 $a>2$ 时, 该二次型是正定二次型.

注意对于实对称阵 A, 若所有顺序主子式 ≥ 0, 则 A 未必是半正定. 例如 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

例 3 设 A 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶对称阵. 证明: 当 a 充分大时, $aE+A$ 正定.

证明 对于实对称阵 A, 存在正交阵 Q, 使得 $A = Q^{-1}\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}Q$, 其中 λ_i, $1 \le i \le n$, 是 A 的特征值. 令 $a = \max_i |\lambda_i| + 1$, 显然 $(aE + A)^T = aE + A$, 且

$$aE + A = Q^{-1}\{a + \lambda_1, a + \lambda_2, \cdots, a + \lambda_n\}Q,$$

因为 $a + \lambda_i > 0$, $1 \le i \le n$, 所以 $aE + A$ 是正定阵.

例 4 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T AX$ 经过正交替换 $X = QY$ 后化为标准形 $f = y_1^2 + y_2^2$, 且 Q 的第三列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

(1) 求 A;

(2) 证明 $A + E$ 是正定阵.

解 (1) 因为

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$. Q 的第三列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$, 所以 A 的属于 λ_3 的特征值为 $\alpha_3 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$. 因为实对称阵的属于不同特征值的特征向量是正交的，解线性方程组

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2 = 0$$

得到

$$\alpha_1 = (0, 1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (-1, 0, 1)^T,$$

它们是正交的，且是属于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 的特征向量. 由

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, 0),$$

得到

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, 0)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(2) $A + E$ 是对称阵且特征值是 $2, 2, 1$, 全大于零，所以 $A + E$ 是正定阵.

习题

1. 判断下面二次型是否为正定二次型.

(1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$;

(2) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$;

(3) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$.

2. 当 a 去何值时，下面二次型是正定二次型.

$$x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 2ax_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$$

3. 问当 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足什么条件时，二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 + a_1x_2)^2 + (x_2 + a_2x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} + a_{n-1}x_n)^2 + (x_n + a_nx_1)^2$$

是正定矩阵.

4. (1) 设 A, B 为 n 阶正定阵, 则 $A+B$ 是正定阵, ABA 也是正定阵;
(2) 设 A 为正定阵, $c>0$, 则 cA 为正定阵;
(3) A 正定, 则 A^{-1}, A^* 正定.

5. A 正定, 则 A 中绝对值最大元必在主对角线上.

6. 设 A 是 n 阶正定阵, 求证 $|A+E|>0$.

复习题

1. 证明: 实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} (b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \cdots + b_{in}x_n)^2$$

的秩等于下面矩阵 B 的秩.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

2. 一个实二次型可分解为两个实系数的一次齐次多项式之积的充分必要条件是或者二次型的秩等于 1, 或者二次型的秩等于 2 且符号差为 0.

3. 设 A 是 n 阶正定阵, 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 定义

$$(X, Y) = X^T AY,$$

证明 $(-,-)$ 是一个内积, 从而定义了一个欧氏空间.

4. 实对称阵 A 是正定的充分必要条件是 A 的所有主子式大于零.

5. 设 A 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶对称阵, 则下列条件等价:
(1) A 正定;
(4) 存在单位上三角阵 B, 使 $A = B^T DB$, 其中 D 是正定对角阵;
(5) 存在正对角元的上三角阵 C, 使得 $A = C^T C$.

6. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 求证对于任意的 $t>0\in\mathbb{R}$, $tE + A^T A$ 是正定矩阵.

7. 设对称阵 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是正定的, 证明存在正定阵 B, 使得 $A = B^2$.

8. 设 A 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶对称阵. 则下列叙述是等价的.
(1) A 为半定阵;
(2) 对任意 $a>0$, $aE+A$ 正定;
(3) 存在秩为 r 的 n 阶实矩阵 B, $r<n$, 使 $A = B^T B$;
(4) A 的所有主子式 ≥ 0.

9. A, B 为正定阵, 且 $AB = BA$, 则 AB 正定.

10. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_s \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_s^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_s^{n-1} \end{pmatrix},$$

其中 $a_i \neq a_j$, $1 \leq i \neq j \leq s$. 若 $B = A^T A$ 是正定阵，求 s 的值.

11. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值;

(2) 求正交替换 $X = QY$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形;

(3) 求方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解.

12. 设 A 是 n 阶反对称矩阵. 求证： A 必合同于 $\mathrm{diag}\{S, \ldots, S, 0, \ldots, 0\}$, 其中 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 且若 $r(A) = 2r$, 则有 r 个 S.

11. 实反对称矩阵的行列式总是非负实数.

13. 设 $A = (a_{ij})$ 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶正定阵. 求证：二次型

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \end{vmatrix}$$

是负定二次型.

14. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \alpha & B \end{pmatrix}$$

是实对称阵，其中 $a_{11} < 0$, B 是 $n-1$ 阶正定阵. 求证:

(1) $B - a_{11}^{-1}\alpha\alpha^T$ 是正定矩阵;

(2) A 的符号差为 $n-2$.

15. 取定欧氏空间的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 对 $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i\alpha_i$, $\beta = \sum_{i=1}^n y_i\alpha_i$, 有

$$(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$A = ((\alpha_i, \alpha_j))_{i,j}$ 称为基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的度量矩阵.

(1) 在取定 n 维欧氏空间 V 的一个基的前提下，内积与度量矩阵互相唯一确定;

(2) 度量矩阵是实对称阵;

(3) n 维欧氏空间 V 的不同基下的度量矩阵是合同的;

(4) 当基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是正交基时，度量矩阵是对角阵；当基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是标准正交基时，度量矩阵是单位阵 E.