第九章　二次型

§9.2 二次型的规范形，惯性定理

首先考虑 $\mathbb{C}$ 上二次型的规范形.

定理 9.2.1 若 A 是 $\mathbb{C}$ 上 n 阶对称阵，且 $r(A)=r$, 则存在 $\mathbb{C}$ 上 n 阶可逆矩阵 C, 使得

$$C^TAC=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}. \tag{1}$$

式 (5) 称为 $\mathbb{C}$ 上对称矩阵在合同关系下的 **规范形**.

证明 因为 $A^T=A$, 故存在可逆矩阵 C_1, 使

$$C_1^TAC_1=\mathrm{diag}\{d_1,d_2,d_3,\cdots,d_n\}.$$

因为 $r(A)=r$, 不妨设 $d_i\neq 0$, $1\leq i\leq r$, $d_j=0$, $r+1\leq j\leq n$. 令

$$C_2=\mathrm{diag}\{\sqrt{d_1},\sqrt{d_2},\cdots,\sqrt{d_r},1,\cdots,1\}.$$

记 $C=C_1C_2$, 则 C 可逆且

$$C^TAC=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

□

用二次型的语言，就是

定理 9.2.1' 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbb{C}$ 上秩为 r 的 n 元二次型，则必存在非退化线性替换 $X=CY$, 使

$$f(x_1,\cdots,x_n)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2.$$

推论 9.2.1 $\mathbb{C}$ 上对称矩阵 A 合同于 B 的充分必要条件是 $r(A)=r(B)$.

现在讨论 $\mathbb{R}$ 上二次型的规范形.

定理 9.2.2 若 A 是 $\mathbb{R}$ 上秩为 r 的 n 阶对称阵，则存在 $\mathbb{R}$ 上 n 阶可逆矩阵 C, 使得

$$C^TAC=\begin{pmatrix} E_p & O & O \\ O & -E_q & O \\ O & O & O \end{pmatrix},$$

其中 $p+q=r$.

证明 因为 $A^T=A$, 故存在可逆矩阵 C_1, 使

$$C_1^TAC_1=\mathrm{diag}d_1,d_2,d_3,\cdots,d_n.$$

因为 $r(A)=r$, 不妨设 $d_i>0,\ 1\le i\le p,\ d_j<0,\ p+1\le j\le p+q=r,\ d_l=0,\ r+1\le l\le n$. 令

$$C_2=\mathrm{diag}\sqrt{d_1},\cdots,\sqrt{d_p},-\sqrt{d_{p+1}},\cdots,-\sqrt{d_{p+q}},1,\cdots,1.$$

记 $C=C_1C_2$, 则 C 可逆且

$$C^TAC=\begin{pmatrix} E_p & O & O \\ O & -E_q & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

□

定理 9.2.2' 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbb{R}$ 上秩为 r 的 n 元二次型，则必存在非退化线性替换，使

$$f(x_1,\cdots,x_n)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2.$$

下面的惯性定理说明定理中的 p,q 是唯一确定的.

定理 9.3.3(**惯性定理**) 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 $\mathbb{R}$ 上 n 元二次型，若在非退化线性替换 $X=BY$ 与 $X=CZ$, 分别将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 化为两个标准型：

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$$

$$z_1^2+\cdots+z_k^2-z_{k+1}^2-\cdots-z_r^2,$$

则必有 $p=k$.

证明 反证法. 设 $p>k$, 考虑等式

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2=z_1^2+\cdots+z_k^2-z_{k+1}^2-\cdots-z_r^2. \tag{2}$$

由于 $X=BY$ 且 $X=CZ$, 于是 $Z=C^{-1}BY$, 令

$$C^{-1}B=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{cases} z_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n \\ z_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n \\ \cdots \\ z_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases}.$$

由于 $p>k$, 在齐次线性方程组

$$\begin{cases} c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n=0 \\ \cdots \\ c_{k1}y_1+c_{k2}y_2+\cdots+c_{kn}y_n=0 \\ y_{p+1}=0 \\ \cdots \\ y_n=0 \end{cases}$$

中, 有 n 个未知数, 但只有 $n-(p-k)<n$ 个方程, 所以必有非零解. 设有一个非零解 $y_i=a_i,\ 1\le i\le p$, $y_j=0,\ p+1\le j\le p+q$, 代入 (6) 式，左边为 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_p^2>0$, 但前 k 和方程确定了 $z_i=0$, $1\le i\le k$. 故 (6) 式右边 ≤ 0, 矛盾. 故 $p\le k$. 同理 $k\le p$. 因此 $p=k$. □

我们称定理中的 p 为实对称矩阵 A 的 **正惯性指数**, q 为 A 的 **负惯性指数**, $s=p-q$ 为 A 的 **符号差**, 同时也分别成为 A 的二次型的 **正惯性指数**, **负惯性指数** 和 **符号差**. 显然，实对称阵的正惯性指数等于它的正特征值的个数，负惯性指数等于它的负特征值的个数. 在四个数 p,q,r,s 中，若确定其中两个数，其余两个数就确定了. 所以有

推论 9.2.2 若 A, B 是 $\mathbb{R}$ 上 n 阶对称矩阵，则下列条件等价.
(1) $A\sim B$;
(2) A 与 B 有相同的正惯性指数和负惯性指数;
(3) A 与 B 有相同的秩与符号差;
(4) A 与 B 的正特征值的个数相同，负特征值的个数相同.

例 1 试分别在 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{C}$ 上判断下列矩阵是否合同？相似？相抵？

$$A=\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & -3 & \\ -3 & -2 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$$

解 因为 A,B,C 均为可逆阵，所以在 $\mathbb{C}$ 上和在 $\mathbb{R}$ 上 A,B,C 都相抵，在 $\mathbb{C}$ 上 A,B,C 合同.
因为 A,B 的正惯性指数是 2，负惯性指数是 1, 而 C 的正惯性指数是 1，负惯性指数是 2, 所以在 $\mathbb{R}$ 上 A,B 合同.
因为 A,B,C 的特征值互不相等，所以在 $\mathbb{C}$ 上和在 $\mathbb{R}$ 上 A,B,C 都互不相似.

例 2 设 A 是 $\mathbb{C}$ 上 n 阶对称阵，且 $r(A)=r$. 证明 A 可分解为 n 个秩为 1 的对称矩阵之和.

证明 因为 $A^T=A$, 所以存在 $\mathbb{C}$ 上 n 阶可逆矩阵 C 使得

$$A=C^T\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}C.$$

而

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}=E_{11}+E_{22}+\cdots+E_{rr}.$$

令 $A_i=C^TE_{ii}C$,$1\le i\le r$, 则 $r(A_i)=1$, $A_i^T=A_i$, 且 $A=A_1+A_2+\cdots+A_r$.

例 3 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.
(1) 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的所有特征值;
(2) 若二次型的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求 a 的值.

解 (1) 二次型的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(\lambda E-A)=(\lambda-a)(\lambda-a+2)(\lambda-a-1)$, 所以 A 的三个特征值是 $\lambda_1=a,\lambda_2=a-2,\lambda_3=a+1$.
(2) 由二次型的规范形知 A 有两个特征值是正实数，一个特征值为零. 所以 $a=2$.

习题

1. 所有 $\mathbb{C}$ 上 n 阶对称阵按照合同关系分类，共有几类？所有 $\mathbb{R}$ 上 n 阶对称阵按照合同关系分类，共有几类？

2. 设 A 为 $\mathbb{C}$ 上对称阵, 则当 $|A| \neq 0$ 时, A^*, A^{-1} 均与 A 合同.

3. 设 A 为 n 阶复对称矩阵, 且 A 的秩为 r, 求证: A 必可分解为 $A = B^T B$, 其中 B 是秩为 r 的 n 阶矩阵.

4. 设实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_{k+s}^2,$$

其中 $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$, $1 \leq i \leq k+s$. 求证: 二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的正惯性指数 $p \leq k$, 负惯性指数 $q \leq s$.

5. 确定二次型 $f(x, y, z) = ayz + bzx + cxy$ 的秩和符号差.

6. 设 A 是 n 阶实可逆阵, 求

$$B = \begin{pmatrix} O & A \\ A^T & O \end{pmatrix}$$

的正负惯性指数.

7. 设 A 为 n 阶可逆实对称矩阵. A_{ij} 是 A 中的元素 a_{ij} 的代数余子式, $1 \leq i, j \leq n$. 考虑二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{ij}}{|A|} x_i x_j.$$

(1) 写出该二次型的矩阵, 并证明它是 A^{-1};

(2) 二次型 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)A(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ 与 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的规范形是否合同? 说明理由.