第九章 二次型

§9.1 二次型，矩阵的合同，标准形

定义 9.1.1 数域 F 上的 n 元二次齐次多项式

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ =\ &a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\ &\qquad +a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\ &\qquad\qquad +\cdots+\cdots+\cdots\\ &\qquad\qquad\qquad +a_{nn}x_n^2\end{aligned}\tag{1}$$

称为数域 F 上的 n 元二次型，简称 **二次型**.

例如， $x_1^2+2x_1x_2+x_2+3$ 和 $2x_1^3+3x_1^2x_2+x_1x_2x_3$ 不是二次型， $2x_1^2+\sqrt{2}x_1x_3$ 是 $\mathbb{R}$ 上或 $\mathbb{C}$ 上的二次型，不是 $\mathbb{Q}$ 上二次型.

在数域 F 上的 n 元二次型与 F 上的 n 阶对称矩阵之间存在着一一对应关系.

首先，对二次型 (1), 我们将它改写为矩阵的形式

$$\begin{aligned}&f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\ =\ &a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\ &+a_{21}x_1x_2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\ &+\cdots+\cdots+\cdots\\ &+a_{n1}x_1x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2\\ =\ &x_1\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j+x_2\sum_{j=1}^n a_{2j}x_j+\cdots+x_n\sum_{j=1}^n a_{nj}x_j\\ =\ &(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j\\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j\end{pmatrix}\\ =\ &(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

记为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX,\tag{2}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

这里矩阵 A 是对称矩阵. 由此可知，给定一个 F 上的二次型，我们就得到了一个 F 上的对称矩阵 A, 称为该 **二次型的矩阵**. 反过来，若给定数域 F 上的一个对称矩阵 A, 则由 (2) 式，我们可以得到一个 F 上二次型，称为 **对称矩阵 A 的二次型**. 由于二次型与对称矩阵的一一对应关系，我们将矩阵的秩定义为该二次型的**秩**. 以后用 (2) 式表示二次型总指 A 是对称阵.

例 1 求下列二次型的矩阵.

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + x_1x_3$;
(2) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + ix_3^2$.

解 (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & i \end{pmatrix}$.

例 2 求下列矩阵的二次型.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;
(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;
(3) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

解 (1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3^2$;

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

(3) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2$.

为了对二次型做进一步的研究，需要引进线性替换的概念.

定义 9.1.2 关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases} \tag{3}$$

称为由变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的 **线性替换**.

记

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

则 (3) 式可表示为

$$X = CY.$$

当 C 是可逆阵时，线性替换称为 **可逆线性替换**, 或称为 **非退化线性替换**.

对于二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 做可逆线性替换 $X=CY$, 则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX=(CY)^TA(CY)=Y^TBY,$$

其中 $B=C^TAC$. 因为 A 是对称阵，所以 B 也是对称阵，故 Y^TBY 定义了二次型，记为

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=Y^TBY.$$

定理 9.1.1 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 经过可逆线性替换 $X=CY$ 化为 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=Y^TBY$ 的充分必要条件是 $C^TAC=B$.

定义 9.1.3 设 A,B 是数域 F 上的 n 阶矩阵，若存在 n 阶可逆阵 C, 使 $B=C^TAC$, 则称 B 与 A**合同**, 记为 $A\sim B$.

命题 9.1.1 $F^{n\times n}$ 上合同关系满足 (1) 反身性，即 $A\sim A$; (2) 对称性，即如果 $A\sim B$, 则 $B\sim A$; (3) 传递性，即如果 $A\sim B$, $B\sim C$, 则 $A\sim C$.

矩阵的合同必是相抵. 所以合同的矩阵有相同的秩.

合同的定义并没有要求对称阵. 注意到，若 A 是对称矩阵且 B 与 A 合同，则 B 是对称矩阵. 我们主要关注数域 F 上对称阵的合同关系.

二次型的基本问题是寻找一个可逆线性替换，化为一个只含平方项的二次型

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2.$$

相应地，对于对称矩阵 A, 寻找可逆矩阵 C, 使得 C^TAC 是对角阵.

引理 9.1.1 设 A 是数域 F 上的非零对称矩阵，则必存在可逆矩阵 C, 使 C^TAC 的第 $(1,1)$ 元素不等于零.

证明 若 $a_{11}=0$, 而 $a_{ii}\neq 0$, 则用行初等变换将第一行与第 i 行对换，再将第一列与第 i 列对换，得到的矩阵的第 $(1,1)$ 元素不为零. 上述初等变换过程相当于左乘一个 $E(1,i)$, 再右乘 $E(1,i)$, 得到矩阵 $E(1,i)AE(1,i)=E(1,i)^TAE(1,i)$, 它合同于 A.

若所有的 $a_{ii}=0, 1\leq i\leq n$. 设 $a_{ji}\neq 0, i\neq j$, 将 A 的第 j 行加到第 i 行上去, 再将第 j 列加到第 i 列. 因为 A 是对称矩阵，$a_{ji}=a_{ij}\neq 0$, 于是第 (i,i) 元素是 $2a_{ij}$ 且不为零. 上述初等变换过程相当于左乘初等矩阵 $E(i,j(1))$, 再右乘 $E(j,i(1))$, 得到的新矩阵 $E(i,j(1))AE(i,j(1))=E(j,i(1))^TAE(i,j(1))$, 它合同于 A. 归结为上面情况. □

用数学归纳法，我们知道 F 上任意对称阵必合同于对角矩阵.

定理 9.1.2 设 A 是数域 F 上秩为 r 的 n 阶对称矩阵，则必存在 F 上的 n 阶可逆阵 C, 使得

$$C^TAC=\{d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0\}.$$

证明 由引理 9.1.1, 不妨设 $A=(a_{ij})$ 中 $a_{11}\neq 0$. 若 $a_{i1}\neq 0$, 则可将第一行乘以 $-a_{11}^{-1}a_{i1}$ 加到第 i 行上，再将第一列乘以 $-a_{11}^{-1}a_{i1}$ 加到第 i 列上. 由于 $a_{i1}=a_{1i}$, 故得到的矩阵的第 $(1,i)$ 元素及第 $(i,1)$

元素均等于零， $2 \le i \le n$. 由于 $E(j,i(1))^T AE(i,j(1))$ 合同于 A, 可知得到的矩阵与 A 是合同的且是对称的. 这样， A 合同于下列矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

上式右下角是一个 $n-1$ 阶对称矩阵，记为 A_1, 则上面矩阵可记为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

即存在 n 阶可逆阵 C_1, 使得

$$C^T AC = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}.$$

根据归纳假设，存在 $n-1$ 阶可逆矩阵 C_2, 使 $C_2^T A_1 C_2 = D$ 为对角阵.

记

$$C = C_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix},$$

则 C 是 n 阶可逆阵，且

$$C^T AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}^T C_1^T AC_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

是一个对角阵. 因此， A 合同于一对角阵. □

定理 9.1.1' 对 F 上秩为 r 的 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$, 总可以经过可逆线性替换 $X = CY$ 化为

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2, \tag{4}$$

式 (4) 称为二次型 (1) 的 **标准型**.

从定理 9.1.1 的证明，我们得到求与对称阵 A 合同的对角阵的 **初等变换方法**. 对于 A, 存在 n 阶可逆阵 C, 使 $C^T AC$ 为对角阵. 设 $C = C_1 C_2 \cdots C_s$, 其中 C_i 是初等矩阵， $1 \le i \le s$. 由于初等矩阵的转置为同型初等矩阵，所以

$$C^T AC = C_s^T (\cdots (C_2^T (C_1^T AC_1) C_2) \cdots) C_s.$$

对 A 做一系列列的初等变换，再做同样的行的初等变换，就得到与 A 合同的对角矩阵.

我们构造矩阵 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$, 对 A 做一次行的初等变换，就对 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ 做一次列的初等变换. 当矩阵 A 变为对角阵时，矩阵 E 化为可逆阵 C.

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C_s^T (\cdots (C_2^T (C_1^T AC_1) C_2) \cdots) C_s \\ C_1 C_2 \cdots C_s \end{pmatrix}.$$

例 3 用初等变换法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$$

为标准型，并写出所用的可逆变换矩阵.

解

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac12 & \frac12 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac12 & \frac12 & 1 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \\ \frac12 & \frac12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac12 & 1 \\ \frac12 & 0 & \frac12 \\ 1 & \frac12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac12 & 1 \\ 0 & -\frac14 & 0 \\ 1 & \frac12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac14 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac12 & 0 \\ 1 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac14 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac12 & 0 \\ 1 & \frac12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac14 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac12 & -1 \\ 1 & \frac12 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以得标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-\frac14 y_2^2-y_3^2,$$

所用可逆线性替换为 $X=CY$, 其中

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -\frac12 & -1 \\ 1 & \frac12 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

下面介绍 **配方法**.

例 4 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+8x_2x_3+5x_3^2$ 为标准型，并写出所作的线性替换.

解 先将含有 x_1 的项配方.

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+8x_2x_3+5x_3^2 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+6x_2x_3+4x_3^2 \end{aligned}$$

再对后三项中含有 x_2 的项配方，则

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+6x_2x_3+9x_3^2-5x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+3x_3)^2-5x_3^2$$

令

$$\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3 \\ y_2=x_2+3x_3 \\ y_3=x_3 \end{cases}$$

即 $Y=BX$, 其中

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

为可逆阵. 故 $X = B^{-1}Y$. 即

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 3y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

可将原二次型化为标准形

$$y_1^2 + y_2^2 - 5y_3^2.$$

例 5 化二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ 为标准型，并写出所用的可逆替换矩阵.

解 因二次型中不含平方项，先做可逆线性替换，使得含有平方项. 令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则有

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - y_2^2 + (y_1 + y_2)y_3 + (y_1 - y_2)y_3 = y_1^2 + 2y_1y_3 - y_2^2 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2$$

再令

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$$

得标准形

$$f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

所用矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因为 $\mathbb{R}$ 上的二次型的矩阵是实对称阵, 根据上节的结论, 实对称矩阵必可正交相似于对角阵. 即存在正交阵 T, 使得 T^TAT 为对角阵 D, 且 D 的对角元素是 A 的特征值. 对于实二次型做可逆线性替换 $X = TY$, 若 T 是正交矩阵, 则称此线性替换为 **正交线性替换**.

定理 9.1.2 对 $\mathbb{R}$ 上 n 元二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^TAX$, 总可以经过正交线性替换 $X = TY$ 化为

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 λ_i, $1 \le i \le n$, 是实对称阵 A 的所有特征值.

例 6 用正交线性替换将二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$ 化成标准形，并写出所做的正交线性替换.

解 二次型对应的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}.$$

由上一章知， A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-1$, $\lambda_3=8$.

方程 $(-1E-A)X=0$ 的基础解系为 $\alpha_1=(-1,2,0)^T$, $\alpha_2=(-1,0,1)^T$. 做 Schmidt 正交化，得到

$$\beta_1=\alpha_1=(-1,2,0)^T,\quad \beta_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2^T\beta_1}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1=(-\frac{4}{5},\frac{2}{5},1)^T,$$

再单位化得

$$\gamma_1=(-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5},0)^T,\quad \gamma_2=(-\frac{4\sqrt{5}}{15},-\frac{2\sqrt{5}}{15},\frac{\sqrt{5}}{3})^T.$$

方程 $(8E-A)X=0$ 的基础解系为 $\alpha_3=(2,1,2)^T$. 只做单位化，得

$$\gamma_3=(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{2\sqrt{5}}{5})^T.$$

令

$$P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{5}}{5}&-\frac{4\sqrt{5}}{15}&\frac{2\sqrt{5}}{5}\\\frac{2\sqrt{5}}{5}&-\frac{2\sqrt{5}}{15}&\frac{\sqrt{5}}{5}\\0&\frac{\sqrt{5}}{3}&\frac{2\sqrt{5}}{5}\end{pmatrix},$$

则

$$P^TAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&8\end{pmatrix}.$$

所以，作正交线性替换 $x=Py$, 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形

$$-y_1^2-y_2^2+8y_3^2.$$

例 7 设 $f(x_1,x_2,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 是实二次型，若 $\det A<0$, 证明：必存在一组实数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$, 使 $f(a_1,a_2,\ldots,a_n)<0$.

证明 设 C 为可逆阵使 C^TAC 为对角阵 B, 由于 $\det A<0$, 则 $\det B<0$. 不妨设 B 的主对角元素前 r 个为负，则 r 为奇数. 设 $\alpha=(1,\ldots,1,0,\ldots,0)^T$, 其中有 r 个 1, 又令 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)^T=C\alpha$, 则

$$f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=(C\alpha)^TA(C\alpha)=\alpha^TB\alpha<0.$$

注意到和对称矩阵合同的对角阵不唯一. 为了深入讨论问题，下节将考虑规范形.

习题

1. 写出下列二次型的矩阵，并求二次型的秩.

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+4x_1x_3-2x_2x_3$;
(2) $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4-x_3x_4$.

2. 求下列矩阵的二次型.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. 设 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2bx_2x_3$ 的秩为 1，求 a, b 的值.

4. 求 $f(x_1, x_2, x_3) = (ax_1 + bx_2 + cx_3)^2$ 的矩阵和秩.

5. 用初等变换的方法将二次型化为标准形.
(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3$;
(2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 + x_1x_3$.

6. 用配方法将二次型化为标准形.
(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 2x_1x_3$;
(2) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_2^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

7. 用正交线性替换的方法将二次型化为标准形.
(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;
(2) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

8. 设 $A \sim B$, 则 A 可逆当且仅当 B 可逆，这时 $A^{-1} \sim B^{-1}$.

9. 设 $A \sim B$, $C \sim D$ 则

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}.$$

10. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3$, 其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1, 特征值之积为 -12.
(1) 求 a, b 的值；
(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准型，写出所用的正交变换的正交矩阵.