

电力系统潮流计算中结点阻抗矩阵的分块公式

1 问题的提出

在一个有 $n+1$ 个结点, b 条线的电力网中, 各结点上给定电功率 $S_k = P_k + jQ_k, k = 1, 2, \dots, n$ (发电厂为输入功率, 负荷点为输出功率), 要求各结点 k 上的电压 V_k , 使得在各结点上的电压 V_k 与结点电流的公轭 \dot{I}_k 的乘积 $V_k \dot{I}_k$ 就等于 S_k . 这里线路上的阻抗 Z_e (或导纳 $y_e = 1/Z_e$) 都是给定的.

在电工理论中, 按结点分析的方法, 结点电流与结点电压之间的关系是

$$\dot{I} = YV, V = Y^{-1}\dot{I} = Z\dot{I},$$

这里 \dot{I} 是结点电流向量, V 是结点电压向量, Y 与 Z 都是 n 阶矩阵, Y 称为结点导纳矩阵矩阵, Z 称为结点阻抗矩阵.

设 $Y = (y_{km})_{nn}, Z = (z_{km})_{nn}$, 于是问题就成为求方程组

$$S_k - V_k \sum_{m=1}^n y_{km} \dot{V}_m = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

或

$$S_k - \dot{I}_k \sum_{m=1}^n z_{km} I_m = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

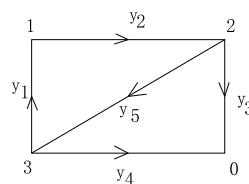
的解. 利用 Y 的, 叫做结点导纳矩阵的方法; 利用 Z 的, 叫做结点阻抗矩阵的方法, 这里主要是结点阻抗矩阵的方法.

2 结点导纳矩阵与结点阻抗矩阵的求法

在电工理论中, 求结点导纳矩阵的方法是比较简单的, 如果有向网络的衔接矩阵是 A (它是 $n \times b$ 的矩阵), 各线路上的导纳是 y_1, y_2, \dots, y_b , 则结点导纳矩阵就是

$$Y = A \text{diag}(y_1, y_2, \dots, y_b) A'.$$

例如, 如图所示的一个简单的有向网络, O 点是参考点,



衔接矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

其中 i 行表示第 i 个端点, j 列表示导纳 y_j .(如下的矩阵同)

则结点导纳矩阵是

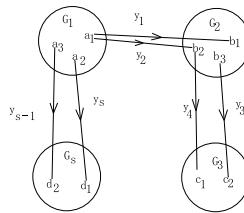
$$\text{Adiag}(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) A' = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 & -y_2 & -y_1 \\ -y_2 & y_2 + y_3 + y_5 & -y_5 \\ -y_1 & -y_5 & y_1 + y_4 + y_5 \end{pmatrix}$$

这是一个很简单的形成办法: 矩阵 Y 中 y_{kk} 就是与结点 k 相接的各线的导纳之和, y_{kl} 就是结点 k 与结点 l 之间联线的导纳的负数 (若结点 k 与 l 结点之间没有联线, 则导纳为零).

结点阻抗矩阵 Z 是导纳矩阵 Y 的逆矩阵, 所以要求结点阻抗矩阵就要求一 n 阶逆矩阵, 在 n 比较大的情况下, 求解逆矩阵 Z 就比较困难, 就是使用电子计算机, 当 n 很大的时候, 譬如有四, 五百个结点, 由于计算机的内存有限, 也算不出 Z 来. 近些年来, 国外有用所谓分块的方法来计算, Kron 利用分块方法求结点阻抗矩阵的公式, 利用所谓正交网络的概念给了证明, 但证明很复杂, 我们这里给出一个简单的代数证明.

3 分块结点阻抗矩阵的公式

设把网络 G 分成 S 块 G_1, G_2, \dots, G_S ; 块与块之间有若干联线称为切断线, 共 t 条, 切断线的端点设为 $a_1, a_2, a_3, \dots; b_1, b_2, \dots; c_1, c_2, \dots; d_1, d_2, \dots$ 如图所示. G_i 的结点导纳矩阵为 Y_i , 结点阻抗矩阵为 $Z_i = Y_i^{-1}$, 又设切断线上的导纳各为 $y_1, y_2, \dots, y_t; z_i = 1/y_i$, 结点与切断线之间的衔接矩阵为 C, C 是 $n \times t$ 矩阵, 例如如图所示的衔接



矩阵 C 是

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \cdots & & 1 \\ -1 & & & & & 1 \\ & -1 & 1 & & & \cdots \\ & & 1 & 1 & & \\ & & -1 & & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ & & & & -1 & \\ & & & & \cdots & -1 \end{pmatrix}$$

又设

$$\bar{Z} = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_t), \bar{Y} = \text{diag}(y_1, y_2, \dots, y_t),$$

显然 $\bar{Y}^{-1} = \bar{Z}$, 令

$$C_t \bar{Z} C + \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_r) = \tilde{Z},$$

其中 $\text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_r) = L$, 则

$$C_t \tilde{Z} C + Z = \tilde{Z},$$

于是整体网络的结点阻抗矩阵 L 的公式是

$$Z = \bar{Z} - \bar{Z} C \tilde{Z}^{-1} C_t \bar{Z} \quad (1)$$

这个公式的好处, 就在于要求出阻抗矩阵 Z , 只要求出分块的阻抗矩阵 Z_1, \dots, Z_r , 以及一个 r 阶矩阵 \tilde{Z} 的逆矩阵, 然后利用公式 (1) 就可以得出 Z , 特别在使用计算机时, 存储量可以大大减少.

4 公式 (1) 的证明

按照 2 中所说的方法做结点导纳矩阵 Y ,

$$Y = \text{diag}(Y_1, Y_2, \dots, Y_r) + X = \bar{Y} + X$$

这里 X 显然是这样一个矩阵: 若结点 a 是切断线的端点, 而与 a 相接的切断线有 p 条, 它们的导纳各为 y_1, y_2, \dots, y_p , 则 X 中第 a 行第 a 列的元素为 $y_1 + y_2 + \dots + y_p$; 若切断

线 y_1 与结点 b 相联, 则 X 中第 a 行第 b 列和第 b 行第 a 列的元素都是 $-y_1$; 其余类推; 其它元素都是零. 如上面中的那个例子, 相应的 X 就是

$$\begin{pmatrix} y_1 + y_2 & -y_1 & -y_2 & & \\ y_r & & & -y_r & \\ & y_{r-1} & & & -y_{r-1} \\ -y_1 & y_1 & & & \\ -y_2 & & y_3 + y_3 & -y_3 & \\ & & y_4 & -y_4 & \\ & & -y_3 & -y_4 & y_4 \\ -y_r & & & -y_4 & \\ & -y_{r-1} & & & \end{pmatrix}.$$

很容易直接算出

$$X = C \text{diag}(y_1, y_2, \dots, y_r), C_t = C \text{diag}\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots, \frac{1}{z_r}\right) C_t = CL^{-1}C_t,$$

由于 $Y = \bar{Y} + X$, 所以

$$\begin{aligned} Z &= Y^{-1} = (\bar{Y} + X)^{-1} = [(I + X\bar{Y}^{-1})\bar{Y}]^{-1} \\ &= \bar{Y}^{-1}(I + X\bar{Y})^{-1} = \bar{Z}(I + ZX\bar{Z})^{-1}. \end{aligned}$$

其中 I 为单位矩阵, 又因为

$$\begin{aligned} &(I + X\bar{Z})(I - C\tilde{Z}^{-1}C_t\bar{Z}) \\ &= I + (X - C\tilde{Z}^{-1}C_t - X\bar{Z}C\tilde{Z}^{-1}C_t)\bar{Z} \\ &= I + (X - (C + X\bar{Z}C)\tilde{Z}^{-1}C_t)\bar{Z} \\ &= I + (CL^{-1}C_t - (C + CL^{-1}C_t\bar{Z}C)\tilde{Z}^{-1}C_t)\bar{Z} \\ &= I + (CL^{-1}C_t - CL^{-1}(L + C_t\bar{Z}C)\tilde{Z}^{-1}C_t)\bar{Z} \\ &= I + (CL^{-1}C_t - CL^{-1}\tilde{Z}\tilde{Z}^{-1}C_t)Z \\ &= I \end{aligned}$$

所以 $(I + X\bar{Z})^{-1} = I - C\tilde{Z}^{-1}C_t\bar{Z}$. 因此 $Z = \bar{Z}(I - C\tilde{Z}^{-1}C_t\bar{Z})$, 即 $Z = \bar{Z} - \bar{Z}C\tilde{Z}^{-1}C_t\bar{Z}$.

摘录于庄瓦金编著《高等代数教程》(国际华文出版社, 2002 年) 第 49-52 页

(陈健敏录入)