第六章　特征值

§6.4 特征值的估计

教学目的和要求 了解关于矩阵特征值估计的第一圆盘定理和第二圆盘定理.

实际应用中常需要考虑矩阵的特征值是否在单位圆内或者特征值的实部是否小于零等问题.

第一圆盘定理 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 则 A 的特征值必在下列圆盘 (称戈氏圆盘) 中：

$$|z-a_{ii}| \le \sum_{j\ne i}|a_{ij}|, 1 \le i \le n.$$

证明 设 λ 是 A 的特征值，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 为相应特征向量, 则 $AX=\lambda X$, 改写成线性方程组形式即为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=\lambda x_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=\lambda x_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=\lambda x_n \end{cases}.$$

对 X, 存在 i, 使得 $|x_i|=\max_{1\le j\le n}|x_j|$, 显然 $x_i\ne 0$. 取上述线性方程组的第 i 个方程，适当移项后再取绝对值，得

$$|(\lambda-a_{ii})x_i| = |\sum_{j\ne i}a_{ij}x_j| \le \sum_{j\ne i}|a_{ij}||x_j| \le \sum_{j\ne i}|a_{ij}||x_i|,$$

而 $x_i\ne 0$, 因此 $|\lambda-a_{ii}|\le\sum_{j\ne i}|a_{ij}|$. $\square$

例 1 估计下列矩阵特征值的范围，其中 $A=\begin{pmatrix} 1.0 & -0.1 & -0.2 & -1.0 \\ 0.1 & 3.0 & -0.2 & 1.1 \\ 0.1 & 0.1 & -4.0 & 0.2 \\ -1.0 & 0.2 & 0.2 & 0.0 \end{pmatrix}$.

解 所求圆盘为 $D_1: |z-1|\le 1.3$, $D_2: |z-3|\le 1.4$, $D_3: |z+4|\le 0.4$, $D_4: |z|\le 1.4$.

注 1 由于 $f_A(\lambda)=f_{A'}(\lambda)$, 因此 A 的特征值也必在下列圆盘中：

$$|z-a_{ii}|\le\sum_{j\ne i}|a_{ji}|, 1\le i\le n.$$

注 2 第一圆盘定理仅告诉我们特征值一定在某个圆盘内，并未指出是否每个圆盘一定存在特征值.

若一个戈氏圆盘与另一个戈氏圆盘是相连的，则称这两个圆盘内的区域是连通的. 即所谓连通区域是指区域内任意两点可以用全部落在该区域内的折线连接起来. 如例 1 中， D_1, D_2, D_4 属同一连通区域，而 D_3 为另一连通区域.

第二圆盘定理 设 A 的 n 个圆盘分成若干个连通区域. 若其中一个连通区域由 k 个圆盘组成，则该连通区域内有且只有 k 个特征值 (若戈氏圆盘重合，则按重数计；若特征值为重根，也按重数计).

证明 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 考虑带参数 t 的矩阵

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1n}\\ ta_{21} & a_{22} & \cdots & ta_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ ta_{n1} & ta_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

则 $A(1)=A$, 而 $A(0)=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}$. $A(0)$ 的特征值就是 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$, 即戈氏圆盘的圆心.

注意到矩阵的特征值是连续依赖于矩阵元素的，因此 $A(k)$ 的特征值连续依赖于 t, 记作 $\lambda_i(t), 1\le i\le n$. 易知 $\lambda_i(0)=a_{ii},\lambda_i(1)=\lambda_i$. 所谓连续依赖就是当 t 变动时，点 $\lambda_i(t)$ 在复平面上画出连续的曲线. 考虑 t 在 $[0,1]$ 中变动，因此点 $\lambda_i(t)$ 画出的连续曲线起点为 $\lambda_i(0)=a_{ii}$, 终点为 $\lambda_i(1)$ 是 A 的特征值. 现设连通区域 (记作 I) 由 k 个戈氏圆盘组成. 因此 $A(0)$ 的 k 个特征值在其中. 如果 $A(1)=A$ 中没有 k 个特征值在区域 I 中，则至少有一个 i, 使得点从 $\lambda_i(0)$ 连续变动到 $\lambda_i(1)$, 而点 $\lambda_i(1)$ 在区域 I 之外. $\lambda_i(1)$ 是 A 的一个特征值，则由第一圆盘定理， $\lambda_i(1)$ 必在另一个连通部分 (记作 II). 那么从 $\lambda_1(0)$ 到 $\lambda_i(1)$ 的连续曲线必有一部分既不在

区域 I 中，也不在区域 II 中，也不在第一圆盘定理所述其他圆盘组成的连通区域内．即有 $t_0, 0 < t_0 < 1$, 使得 $\lambda_i(t_0)$ 不在所有圆盘 $|z - a_{ii}| \le \sum_{j\ne i}|a_{ij}|, 1 \le i \le n$ 中．但 $\lambda_i(t_0)$ 是 $A(t_0)$ 的特征值，由第一圆盘定理，$A(t_0)$ 的特征值必落在某个圆盘 $|z - a_{ii}| \le \sum_{j\ne i}|t_0 a_{ij}|, 1 \le i \le n$ 中．而圆盘 $|z - a_{ii}| \le \sum_{j\ne i}|t_0 a_{ij}|$ 落在圆盘 $|z - a_{ii}| \le \sum_{j\ne i}|a_{ij}|$ 中，与 $\lambda_i(t_0)$ 不落在任何圆盘 $|z - a_{ii}| \le \sum_{j\ne i}|a_{ij}|, 1 \le i \le n$ 中矛盾．所以 $A(1) = A$ 在区域 I 中不可能有少于 k 个的特征值．同理可证，区域 I 也不可能有多于 k 个特征值．故区域 I 中只能有 k 个特征值． □

例 1 中，由 D_1, D_2, D_4 组成一个连通区域，该区域内有 3 个特征值，而 D_3 独立组成另一个连通区域，因此此区域中有一个特征值.

作业 P_{249} 1，2，3.

思考题 P_{249} 4.

选做题 P_{250} 13.