第六章　特征值

§6.1 特征值和特征向量

教学目的和要求 掌握特征值与特征向量，特征子空间，特征多项式的概念，掌握复数域上的矩阵可以相似于上三角矩阵并应用于讨论问题. 掌握判断和计算特征值和特征向量的方法. 注意矩阵与线性变换的对应结论. 注意特征值的概念与数域有关.

一. 特征值与特征向量

定义 1 设 φ 是 n 维线性空间 V 的线性变换. 若存在 $\lambda \in K$, $0 \neq \alpha \in V$, 使 $\varphi(\alpha) = \lambda\alpha$, 则称 λ 为线性变换 φ 的一个特征值， α 称为 φ 关于特征值 λ 的特征向量.

注 1 设 α 是 φ 的属于特征值 λ 的特征向量，则 α 不是 φ 的属于另一个特征值 μ 的特征向量. 否则 $\lambda\alpha = \varphi(\alpha) = \mu\alpha$. 所以 $(\lambda - \mu)\alpha = 0$, $\lambda \neq \mu$, 所以 $\alpha = 0$ 矛盾.

命题 1 设 φ 是 n 维线性空间 V 的线性变换， λ 是 φ 的特征值，则

$$V_\lambda = \{\alpha \in V \mid \varphi(\alpha) = \lambda\alpha\}$$

是 V 的子空间，且是 φ- 不变子空间，称为 φ 的属于特征值 λ 的特征子空间.

证明 V_λ 由 φ 的关于 λ 的所有特征向量和零向量组成, 易证知 V_λ 对于加法和数乘封闭，因而是 V 的子空间. 对于任意的 $\alpha \in V_\lambda$, $\varphi(\alpha) \in V$ 且 $\varphi(\varphi(\alpha)) = \varphi(\lambda\alpha) = \lambda\varphi(\alpha)$. 所以 $\varphi(\alpha) \in V_\lambda$, 故 V_λ 是 φ- 不变子空间. $\square$

注 2 设 α 是 φ 的关于 λ 的特征向量， β 是 φ 的关于 μ 的特征向量， $\lambda \neq \mu$, 则 $\alpha + \beta$ 不是 φ 的特征向量. (留作思考题).

在同构意义下，我们有

定义 2 设 $A \in K^{n\times n}$, 若存在 $0 \neq X \in K^{n\times 1}$, $\lambda \in K$, 使得 $AX = \lambda X$, 则称 λ 为 A 的一个特征值， X 称为 A 关于特征值 λ 的特征向量.

定义 3 设 $A \in K^{n\times n}$, λ 为 A 的一个特征值， $V_\lambda = \{X \in K^{n\times 1} \mid AX = \lambda X\}$ 称为 A 的属于特征值 λ 的特征子空间.

注 3 设 $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, φ 在 V 的一组基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 下矩阵为 A, $\alpha \in V$, α 在 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 下的坐标向量为 X. 则有

$$\lambda\alpha = \lambda(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)X = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)\lambda X,$$

$$\varphi(\alpha) = \varphi((\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)X) = \varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)X = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)AX,$$

所以 $\varphi(\alpha) = \lambda\alpha \Leftrightarrow AX = \lambda X$.

二. 特征多项式

定义 4 设 $A \in K^{n\times n}$, 称

$$|\,\lambda I - A\,| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 A 的特征多项式，记为 $f_A(\lambda)$.

注 4 设 λ 是 A 的特征值，则存在 $0 \neq X \in K^{n\times 1}$, 使 $AX = \lambda X$, 所以 $(\lambda I - A)X = 0$. 故 $|\lambda I - A| = 0$, 即 λ 是 $f_A(\lambda)$ 的根. 反之，若 λ 是 $f_A(\lambda)$ 的根且 $\lambda \in K$, 则由 $(\lambda I - A)X = 0$ 可知 $(\lambda I - A)X = 0$ 有非零解，即存在 $0 \neq X \in K^{n\times 1}$, 使 $AX = \lambda X$. 所以 $f_A(\lambda)$ 的在 K 上的根是 A 的特征值.

命题 2 $f_A(\lambda) = f_{A'}(\lambda)$.

证明 $|\lambda I - A| = |\lambda I - A'|$. □

命题 3 设 $A, B \in K^{n\times n}$,A 相似于 B, 则 $f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$. 所以 A 和 B 有相同的特征值.

证明 因为 A 与 B 相似，故存在可逆阵 $P \in K^{n\times n}$, 使 $B = P^{-1}AP$. 所以 $f_B(\lambda) = |\lambda I - B| = |\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |\lambda I - A| = f_A(\lambda)$. □

注 5 相似矩阵有相同的特征值，反之未必.

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, 则 A 与 B 有相同的特征值，但它们不相似. 事实上，若 A 相似于 B, 则存在可逆阵 $P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, 使得 $PBP^{-1}=A$. 故有

$$\frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=\frac{1}{\triangle}\begin{pmatrix}\triangle-ac&a^2\\-c^2&\triangle+ac\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

这里 $\triangle=ad-bc\neq 0$. 易见 $a=c=0$, $\triangle=0$. 矛盾.

注 6 若 A 相似于三角阵 U, 则 U 的对角元即为 A 的特征值.

注 7 设 φ 是 n 维空间 V 的线性变换，在某一组基下的矩阵为 A, 定义 φ 的特征多项式为 A 的特征多项式，记 $f_\varphi(\lambda)$. 即 $f_\varphi(\lambda)=f_A(\lambda)$. 因为 φ 在不同基下的矩阵是相似的，相似的矩阵有相同的特征多项式，所以这样的定义是合理的.

注 8 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$

考虑 $|\lambda I-A|$ 的展开式，可得到

$$a_1=-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})=-tr(A), a_n=(-1)^n|A|.$$

设 $f_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$, 由韦达定理知

$$a_1=-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n),\quad a_n=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

因而

$$tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n,\quad |A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

一般地，有如下定理：

定理 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,A 的特征多项式

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n+b_1\lambda^{n-1}+\cdots+b_{n-1}\lambda+b_n,$$

则

$$b_k=(-1)^k\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\begin{vmatrix}a_{i_1i_1}&a_{i_1i_2}&\cdots&a_{i_1i_k}\\a_{i_2i_1}&a_{i_2i_2}&\cdots&a_{i_2i_k}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i_ki_1}&a_{i_ki_2}&\cdots&a_{i_ki_k}\end{vmatrix}$$

其中 $1 \le k \le n$, 和号 $\sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n}$ 表示对满足 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ 的所有可能的 1 至 n 中的整数 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 求和，特别地

$$b_1 = -\sum_{i=1}^{n} a_{ii},\ \ b_n = (-1)^n |A|.$$

证明 留做 " 挑战习题 ", 也可参阅有关参考书. $\square$

三. 特征值与特征向量的计算

第一步：求 $f_A(\lambda) = |\lambda I - A|$;

第二步：求 $f_A(\lambda)$ 的所有根. 其中在 K 上的根为特征值;

第三步：对每个特征值 λ_0, 求 $(\lambda_0 I - A)X = 0$ 的基础解系 $X_1, X_2, \cdots, X_s$, 则 $k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_sX_s$, 其中 k_i 不全为 0, 为所求对应 λ_0 的特征向量.

例 2 求 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量. $1, a, d$ 两两互异， $b \neq 0$.

解

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & & \\ & \lambda - a & -b \\ & & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - a)(\lambda - d).$$

当 $\lambda_1 = 1$ 时， $\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & -b \\ 0 & 0 & 1-d \end{pmatrix}$, $X_1 = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \neq 0$.

当 $\lambda_2 = a$ 时， $\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & a-d \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$, $k \neq 0$.

当 $\lambda_3 = d$ 时， $\lambda_3 I - A = \begin{pmatrix} d-1 & 0 & 0 \\ 0 & d-a & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{d-a}k \\ k \end{pmatrix}$, $k \neq 0$.

例 3 求 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

解

$$f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda - 2 & 1 \\ -2 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

当 $\lambda_1=1$ 时,

$$(\lambda_1 I-A)=\begin{pmatrix}-2&-1&1\\-2&-1&1\\-2&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以属于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量是 $X_1=(k,0,2k)'$, $0\neq k\in K$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时,

$$(\lambda_2 I-A)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-2&0&1\\-2&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\-2&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量是 $(k,k,2k)'$, $0\neq k\in K$.

例 4 在有理数域上求 $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ 的特征值.

解 $\lambda_{1,2}=\pm i$, 无有理特征值.

四. 上三角标准型及其应用

定理 任一复方阵必 (复) 相似于一上三角阵.

证明 法一 (**矩阵方法**).

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, 对 n 作归纳法. 当 $n=1$ 时, 结论显然. 设对 $n-1$ 阶成立. 对 n 阶方阵 A, A 至少有一特征值 $\lambda_1\in\mathbb{C}$, 相应的一个特征向量为 $X_1\in\mathbb{C}^{n\times 1}$, 即

$$AX_1=\lambda_1 X_1.$$

将 X_1 扩为 $\mathbb{C}^{n\times 1}$ 的一组基 $X_1,X_2,\cdots,X_n$. 令 $P_1=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$, 则 P_1 是复可逆阵, 且 $AP_1=P_1\begin{pmatrix}\lambda_1&*\\0&A_1\end{pmatrix}$.

因为 A_1 是 $\mathbb{C}$ 上 $n-1$ 阶方阵, 由归纳假设, 存在 $n-1$ 阶复可逆阵 P_2 使 $P_2^{-1}A_1P_2$ 为上三角阵 L, 令 $P=P_1\begin{pmatrix}1&0\\0&P_2\end{pmatrix}$, 则 P 是复可逆阵, 且

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&*\\0&L\end{pmatrix}.$$

法二 (**线性变换角度**). 先将其“翻译”为线性变换描述形式. 对 n 作归纳法. 当 $n=1$ 时, A 视作 $\varphi:V\to V$(其中 $\dim V=1$) 在 V 的一组基下的表示矩阵,

结论成立；设当 A 为 $n-1$ 阶矩阵时结论成立．对 n 阶矩阵 A, A 为 $\varphi: V \to V(\dim V = n$, V 为 $\mathbb{C}$ 上线性空间) 在 V 的一组基下的表示矩阵．对该 φ, λ_1 为 φ 的特征值， α_1 为其对应的特征向量．将 α_1 扩为 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 令 $V_1 = \mathrm{span}\{\alpha_1\}$, $V_2 = \mathrm{span}\{\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n\}$, 则 $V = V_1 \oplus V_2$. $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & \beta \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. 在 V_2 中定义 ψ, 使得

$$\psi(\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)A_2.$$

此时 $\dim V_2 = n-1$. 由归纳假设，在 V_2 中存在基 $\beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n$, 使得

$$\psi(\beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n) = (\beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n)U,$$

其中 U 为上三角阵． P_1 为从 $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ 到 $\beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵．即

$$(\beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n) = (\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n)P_1,$$

则 ψ 在 $\beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n$ 下的表示矩阵 U 与其在 $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ 下的表示矩阵相似，即 $U = P_1^{-1}A_2P_1$. 令 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$, 则 P 可逆, 且 $(\alpha_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P$, 从而 $\alpha_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 V 的一组基,

$$\varphi(\alpha_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)AP = (\alpha_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)P^{-1}AP,$$

从而

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \beta P \\ 0 & U \end{pmatrix}. \quad \square$$

注 9 数域 K 上的矩阵未必都相似于 K 上三角阵．如 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. 设 $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}$ 上二阶可逆矩阵，且 $PAP^{-1} = B$. 则 $B = PAP^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+2bd & -2b^2-a^2 \\ 2d^2+c^2 & -2bd-ac \end{pmatrix}$, 所以 $c = d = 0$, 故 $B = \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 这样 B 有特征值 0, 与 A 的特征值不同．矛盾． $\square$

注 10 若数域 K 上的 n 阶方阵所有 n 个特征值全在 K 中，则必存在 K 上 n 阶可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为上三角阵.

注 11 在同构意义下，定理为

定理 设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维空间 V 的线性变换，则存在 V 的一组基，使得 φ 在这组基下的矩阵是上三角阵．这时主对角线上元素是 φ 的所有特征值.

例 5 设 $A \in K^{n\times n}$, $g(x) \in K[x]$,

(1) 若 λ 是 A 的特征值，则 $g(\lambda)$ 是 $g(A)$ 的特征值；

(2) 若 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值，则 $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \cdots, g(\lambda_n)$ 是 $g(A)$ 的全部特征值.

证明 (1) 因 $AX = \lambda X$, 则 $A^2X = \lambda^2 X$, 从而 $A^kX = \lambda^k X$, 且 $(sA^i + tA^j)X = (s\lambda^i + t\lambda^j)X$, 故 $g(A)X = g(\lambda)X$, 即 X 是 $g(A)$ 对应于 $g(\lambda)$ 的特征向量． $g(\lambda)$ 为 $g(A)$ 的特征值.

(2) 因为 A 有 n 个特征值，故相似于上三角阵，即有 $P \in K^{n\times n}$, 使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

计算可得

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

从而

$$P^{-1}g(A)P = g(P^{-1}AP) = \begin{pmatrix} g(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ 0 & g(\lambda_2) & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & g(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

故 $g(A)$ 的全部特征值是 $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \cdots, g(\lambda_n)$. □

例 6 设 $A \in K^{n\times n}$ 且 $|A| \neq 0$, 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

(1) $\lambda_i \neq 0,\ 1 \le i \le n$;

(2) $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1} 的全部特征值；

(3) $|A|\lambda_1^{-1}, |A|\lambda_2^{-1}, \cdots, |A|\lambda_n^{-1}$ 是 A^* 的全部特征值.

证明 (1) 因 $|A| = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ 即得.

(2) 由定理，存在可逆阵 P, 使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

故有

$$P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & * & * & * \\ 0 & \lambda_2^{-1} & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

所以 $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1} 的全部特征值.

(3) 由 $A^* = |A|A^{-1}$ 即得. □

五. 例

例 7 设 n 阶方阵 A 适合 $g(x)$, 即 $g(A) = 0$. 则 A 的特征值也适合 $g(x)$, 即 $g(\lambda) = 0$.

证明 设 $AX = \lambda X$, 则 $g(\lambda)X = g(A)X = 0$. 而 $X \neq 0$, 所以 $g(\lambda) = 0$. □

例 8 设 A, B 为 n 阶方阵，求证 $f_{AB}(\lambda) = f_{BA}(\lambda)$.

证明 (法一)

令 $f(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}) = |A|$, $g(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}) = |\lambda I - AB| - |\lambda I - BA|$. 当 $f(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}) \neq 0$ 时 A 可逆， $A^{-1}ABA = BA$, 即 AB 相似于 BA, 所以 $g(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}) = 0$. 故 $g(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn}) = 0$, 即 $f_{AB}(\lambda) = f_{BA}(\lambda)$.

(法二) (1) 当 $|A| \neq 0$ 时， $A^{-1}(AB)A = BA$, 故 AB 与 BA 相似，命题成立.

(2) 当 $|A| = 0$ 时， $|tI + A|$ 至多有 n 个根，故存在 $t_0 \in \mathbb{R}$, 使得任意 $t > t_0$ 时，恒有 $|tI + A| \neq 0$. 由 (1) 知对任意给定的 B, $(tI + A)B$ 与 $B(tI + A)$ 相似，即

$$|\lambda I - (tI + A)B| = |\lambda I - B(tI + A)|.$$

令 $g(t) = |\lambda I - (tI + A)B| - |\lambda I - B(tI + A)|$, 则 $\deg g(t) \leq n$, 取 $n + 1$ 个不同的数 $t_1, t_2, \cdots, t_{n+1} > t_0$, 均有 $g(t_i) = 0$, $1 \leq i \leq n + 1$, 故 $g(t) = 0$. 特别地 $g(0) = 0$, 故 $|\lambda I - AB| = |\lambda I - BA|$. □

(法三)

$$\begin{pmatrix} I & -A \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \lambda I \\ I & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda I - AB \\ \lambda I & \lambda B \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -B & \lambda I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \lambda I \\ I & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \lambda I \\ \lambda I - BA & 0 \end{pmatrix},$$

两边取行列式即得. □

(法四)

$$\begin{pmatrix} I & A \\ B & \lambda I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I & -A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ \lambda B & \lambda I - BA \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & A \\ B & \lambda I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ -B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I - AB & A \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix}$$

两边取行列式即得. □

(法五) 设 $r(A) = r$, 则存在可逆阵 P, Q, 使 $A = P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$. 令 $QBP = \begin{pmatrix} C & D \\ F & G \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{aligned} P^{-1}(\lambda I - AB)P &= \lambda I - P^{-1}AQ^{-1}QBP = \lambda I - \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & D \\ F & G \end{pmatrix} \\ &= \lambda I - \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I - C & -D \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(\lambda I - BA)Q^{-1} &= \lambda I - QBPP^{-1}AQ^{-1} = \lambda I - \begin{pmatrix} C & D \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \lambda I - \begin{pmatrix} C & 0 \\ F & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I - C & 0 \\ -F & \lambda I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

两边取行列式即得. □

例 9 $A \in K^{m\times n}$,$B \in K^{n\times m}$, 且 $m \geq n$. 求证:

(1) $|\lambda I - AB| = \lambda^{m-n}|\lambda I - BA|$;

(2) $tr(AB) = tr(BA)$;

(3) 设 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 是 m 个同阶矩阵 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 的任何循环排列, 则 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 与 $B_1, B_2, \cdots, B_m$ 有相同特征多项式, 因而有相同特征值和迹.

证明 (1)(法一)

当 $m > n$ 时. 若 $\lambda \neq 0$, 则 $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -\lambda^{-1}B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I_m - AB & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_m & A \\ 0 & I_n - \lambda^{-1}BA \end{pmatrix}$, 所以 $|\lambda I - AB| = \lambda^m |I - \lambda^{-1}BA| = \lambda^{m-n}|\lambda I - BA|$. 若 $\lambda = 0$, 因为 $r(AB) \leq m < n$, 所以 $|AB| = 0 = 0^{m-n}|-BA|$.

当 $m = n$ 时. 若 $\lambda \neq 0$, 即上面的例子. 若 $\lambda = 0$, 则 $|0I_n - AB| = |-AB| = |-BA| = |0I - BA|$.

(法二) 令 $A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \end{pmatrix}_{m\times m}$, $B_1 = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}_{m\times m}$, 由上例知 $|\lambda I - A_1B_1| = |\lambda I - B_1A_1|$, 故 $|\lambda I - A_1B_1| = |\lambda I - AB|$, 而

$$|\lambda I - B_1A_1| = |\lambda I - \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}| = \lambda^{m-n}|\lambda I - BA|;$$

(2) 由矩阵特征多项式第二高次项系数为矩阵之迹，即得;

(3) 由 (1), (2) 即得.

(法三)

$$\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_m - AB & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda I_m & A \\ 0 & \lambda I_n - BA \end{pmatrix},$$

两边取行列式即得. □

例 10 设 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}$, 且 $\alpha\alpha' = 1$, 求 $I_n - 2\alpha'\alpha$ 的特征值.

解 λ 是 $A = I_n - 2\alpha'\alpha$ 的特征值，则

$$|(\lambda - 1)I_n + 2\alpha'\alpha| = (\lambda - 1)^{n-1}|(\lambda - 1) + 2\alpha\alpha'| = (\lambda - 1)^{n-1}(\lambda + 1),$$

故 1 为 $n-1$ 重特征值，-1 为 1 重特征值. □

例 11 已知 n 阶矩阵的秩等于 $n-1$, 其特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$. 试求 A^* 的全部特征值.

解 因 $r(A) = n-1$, 故 A 至少有一个特征值为 0, 不妨设 $\lambda_n = 0$. 对 A, 存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} := B$, 则 $B^* = P^*A^*(P^*)^{-1}$ 与 A^* 相似，从而与 A^* 有相同特征值.

$$B^* = \begin{pmatrix} \prod_{i\neq 1}\lambda_i & * & \cdots & * \\ & \prod_{i\neq 2}\lambda_i & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \prod_{i\neq n}\lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ & 0 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \prod_{i<n}\lambda_i \end{pmatrix}.$$

所以 A^* 的特征值为 $0(n-1$ 重$)$ 及 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}$. □

例 12 设 $A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$, 则 $f_A(\lambda) = f_{A_1}(\lambda)f_{A_2}(\lambda)$.

证明 $f_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda I - A_1 & \\ & \lambda I - A_2 \end{vmatrix} = |\lambda I - A_1||\lambda I - A_2| = f_{A_1}(\lambda)f_{A_2}(\lambda)$.
□

例 13 实矩阵 $I_n - A$ 的特征值模长都小于 1, 求证 $0 < |A| < 2^n$.

证明 易知 λ 是 A 的特征值的充分必要条件是 $1-\lambda$ 是 $I-A$ 的特征值. 设 $AX = \lambda X$, 则 $|1-\lambda| < 1$. 若 λ 为实数, 则 $0 < \lambda < 2$; 若 λ 为虚数, $\overline{\lambda}$ 也是特征值. 记 $\lambda = a + ib$, 则 $|1-\lambda|^2 = (1-a)^2 + b^2 < 1$, 所以 $|1-a| < \sqrt{1-b^2}$, 故 $a < 1 + \sqrt{1-b^2} < 2$, 并且 $0 < a^2 + b^2 < 1 - 1 + 2a = 2a < 4$. 根据 $|A| = \prod_{j=1}^{n}\lambda_j$, 得 $0 < |A| < 2^n$. □

作业 P_{215} 1.(3), 3, 4, 5, 6, 10.(1); P_{229} 3, 11.

思考题 P_{215} 7, 8; P_{228} 1, 2, 10

选做题 P_{216} 9(2); P_{228} 4, 5