第七章　相似标准形

§7.6 Jordan 标准形的进一步讨论

本节首先利用 Jordan 标准形讨论对应的线性空间的分解理论.

设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，φ 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{e_1},(\lambda-\lambda_2)^{e_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{e_k},$$

则存在 V 的一组基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 使得

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} J(\lambda_1,e_1) & & & \\ & J(\lambda_2,e_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_k,e_k)\end{pmatrix},$$

其中 $e_1+e_2+\cdots+e_k=n$.

令

$$V(\lambda_1,e_1)=\langle\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{e_1}\rangle,$$

则

$$\begin{array}{l}\varphi(\xi_1)=\lambda_1\xi_1+\xi_2,\\ \varphi(\xi_2)=\lambda_1\xi_2+\xi_3,\\ \cdots\cdots\cdots\\ \varphi(\xi_{e_1-1})=\lambda_1\xi_{e_1-1}+\xi_{e_1}\\ \varphi(\xi_{e_1})=\lambda_1\xi_{e_1}.\end{array}\tag{1}$$

故 $\varphi(V(\lambda_1,e_1))\subseteq V(\lambda_1,e_1)$, 即 $V(\lambda_1,e_1)$ 是 φ- 子空间. 同理，令

$$V(\lambda_j,e_j)=\langle\xi_{t_j+1},\xi_{t_j+2},\cdots,\xi_{t_j+e_j}\rangle,$$

其中 $t_j=e_1+e_2+\cdots+e_{j-1}$, 即 $V(\lambda_j,e_j)$ 对应若当块 $J(\lambda_j,e_j)$, 对应初等因子 $(\lambda-\lambda_j)^{e_j}$, 则 $V(\lambda_j,e_j)$ 也是 φ- 子空间，故有 φ- 子空间的直和分解

$$V=V(\lambda_1,e_1)\oplus V(\lambda_2,e_2)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_k,e_k).$$

由 (1) 式可得

$$\begin{array}{l}(\varphi-\lambda_1\mathrm{id}_V)\xi_1=\xi_2,\\ (\varphi-\lambda_1\mathrm{id}_V)\xi_2=\xi_3,\\ \cdots\cdots\cdots\\ (\varphi-\lambda_1\mathrm{id}_V)\xi_{e_1-1}=\xi_{e_1}\\ (\varphi-\lambda_1\mathrm{id}_V)\xi_{e_1}=0\end{array}\tag{2}$$

记 $\alpha=\xi_1,\psi=\varphi-\lambda_1\mathrm{id}_V$, 则

$$\xi_2=\psi(\alpha),\xi_3=\psi^2(\alpha),\cdots,\xi_{e_1}=\psi^{e_1-1}(\alpha),0=\psi^{e_1}(\alpha)=0.$$

即 $\alpha,\psi(\alpha),\psi^2(\alpha),\cdots,\psi^{e_1-1}(\alpha)$ 构成 $V(\lambda_1,e_1)$ 的基，且 $\psi^{e_1}(\alpha)=0$.

定义 7.6.1 V 的 r 维子空间 U 称为线性变换 ψ 的 **循环子空间**, 若存在 $\alpha\in U$, 使 α, $\psi(\alpha)$, $\psi^2(\alpha)$, $\cdots$, $\psi^{r-1}(\alpha)$ 为 U 的一个基且 $\psi^r(\alpha)=0$. 此时，称 α, $\psi(\alpha)$, $\psi^2(\alpha)$, $\cdots$, $\psi^{r-1}(\alpha)$ 为 U 的一个 **循环基**.

根据上面的分析和讨论，我们知道每一个 $V(\lambda_i,e_i)$ 都是 $\varphi-\lambda_1\mathrm{id}_V$ 的循环子空间. 所以有如下的分解定理. 关于 $V(\lambda_i,e_i)$ 不能继续分解成为两个非零 $\varphi-$ 子空间的直和，根据第四章复习题 12.

定理 7.6.1 设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维空间 V 的线性变换，设 φ 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{e_1},(\lambda-\lambda_2)^{e_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{e_k},$$

则

$$V=V(\lambda_1,e_1)\oplus V(\lambda_2,e_2)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_k,e_k),$$

这里 $V(\lambda_i,e_i)$ 是 $(\varphi-\lambda_i\mathrm{id}_V)$ 的循环子空间，因而是 $\varphi-$ 子空间； $\dim V(\lambda_i,e_i)=e_i(i=1,2,\cdots,k)$; 且每个 $V(\lambda_i,e_i)$ 不能分解成为两个非零 $\varphi-$ 子空间的直和.

将定理 7.6.1 中属于同一个特征值 λ_1 的循环子空间的直和记为 $R(\lambda_1)$, 即

$$R(\lambda_1)=V(\lambda_1,e_{11})\oplus V(\lambda_1,e_{12})\oplus\cdots\oplus V(\lambda_1,e_{1,l_1}).$$

记 $n_1=\dim R(\lambda_1)$, 则 $n_1=e_{11}+e_{12}+\cdots+e_{1,l_1}$. 易见， n_1 是 λ_1 的代数重数.

引理 7.6.1

$$R(\lambda_1)=\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1\mathrm{id}_V)^{s_1},$$

其中 $s_1=\max\{e_{11},e_{12},\cdots,e_{1,l_1}\}$.

证明 对任意的 $\alpha\in V(\lambda_1,r_{1j}),(j=1,2,\cdots,l_1)$, $(\varphi-\lambda_1\mathrm{id}_V)^{s_1}(\alpha)=0$, 所以

$$R(\lambda_1)\subseteq\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1\mathrm{id}_V)^{s_1}.$$

反之，设 $\alpha\in\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1\mathrm{id}_V)^{s_1}$. $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$, 其中 $\alpha_i\in V(\lambda_i,e_i),(i=1,2,\cdots,k)$. 我们断言，对于 $\lambda_j\neq\lambda_1$ 的那些 j, 必有 $\alpha_j=0$, 因而

$$\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1\mathrm{id}_V)^{s_1}\subseteq R(\lambda_1).$$

事实上，考虑 $0\neq\alpha_j\in V(\lambda_j,e_j)$, $\lambda_j\neq\lambda_1$. 因 $V(\lambda_j,e_j)$ 是 φ- 子空间，因而也是 $(\varphi-\lambda_1\mathrm{id}_V)^{s_1}$-子空间. 因为 $\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1\mathrm{id}_V)^{s_1}(\alpha)=0$, 所以必有 $\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1\mathrm{id}_V)^{s_1}(\alpha_j)=0$. 记 $V(\lambda_j,e_j)$ 的基为 $\xi_{h+1},\xi_{h+2},\cdots,\xi_{h+e_j}$, 其中 $h=e_1+\cdots+e_{j-1}$, 则

$$\varphi(\xi_{h+1},\xi_{h+2},\cdots,\xi_{h+e_j})=(\xi_{h+1},\xi_{h+2},\cdots,\xi_{h+e_j})J(\lambda_j,e_j).$$

所以

$$(\varphi-\lambda_1\mathrm{id}_V)^{s_1}(\xi_{h+1},\cdots,\xi_{h+e_j})=(\xi_{h+1},\cdots,\xi_{h+e_j})J(\lambda_j-\lambda_1,e_j)^{s_1}.$$

因为 $\lambda_j \neq \lambda_1$, 所以 $J(\lambda_j - \lambda_1, e_j)$ 为可逆矩阵，故 $(\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}_V)^{s_1}$ 在 $V(\lambda_j, e_j)$ 上的限制映射为可逆映射，故 $(\varphi - \lambda_1 id)^{l_1}(\alpha_j) \neq 0$. 矛盾. □

引理中的 $J(\lambda_1, s_1)$ 是 φ 的属于特征值 λ_1 的阶数最大的若当块. 所以 s_1 是 λ_1 作为 $m_\varphi(\lambda)$ 的根的重数.

定义 7.6.2 设 λ_0 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维空间上线性变换 φ 的特征值，且 λ_0 是 $m_\varphi(\lambda)$ 的 s_0 重根. 则

$$R(\lambda_0) = \{\alpha \in V \mid (\varphi - \lambda_1 \mathrm{id}_V)^{s_0}(\alpha) = 0\}$$

是 V 的 $\varphi-$ 子空间，称为属于特征根 λ_0 的 **根子空间**.

对 φ 的任意特征值 λ_i, 引理 7.6.1 结论也成立. 故有下面的分解定理.

定理 7.6.2 设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换， $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 是 φ 的全部不同特征值，且

$$m_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1}(\lambda - \lambda_2)^{s_2} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{s_t},$$

则

$$V = R(\lambda_1) \oplus R(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus R(\lambda_s),$$

其中 $R(\lambda_i)$ 是 λ_i 的根子空间； $\mathrm{dim} R(\lambda_i)$ 是 λ_i 的代数重数； $R(\lambda_i)$ 可表为若干个循环子空间的直和.

下面讨论特征子空间与根子空间的关系.

记 λ_1 为 φ 的特征根， $V_{\lambda_1} = \{v \in V | \varphi(v) = \lambda_1 v\}$ 是 λ_1 的特征子空间，显然有

$$V_{\lambda_1} \subseteq R(\lambda_1) = V(\lambda_1, e_{11}) \oplus V(\lambda_1, e_{12}) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_1, e_{1,l_1}).$$

那么 V_{λ_1} 在哪里呢？

因为 $V(\lambda_1, e_{11})$ 是 φ- 子空间，记 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{e_{11}}$ 是 $V(\lambda_1, e_{11})$ 的循环基.

$$\varphi|_{V(\lambda_1, e_{11})}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{e_{11}}) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{e_{11}}) J(\lambda_1, e_{11}).$$

易知 $\xi_{e_{11}} \in V_{\lambda_1}$, 又因为 $r(\lambda_1 E_{e_{11}} - J(\lambda_1, e_{11})) = e_{11} - 1$, 所以 $V(\lambda_1, e_{11})$ 中只有一个线性无关的特征向量. 同理， $V(\lambda_1, e_{1j}), (1 \leq j \leq l_1)$ 中只有一个线性无关特征向量.

进一步， $\xi_{e_{11}}, \xi_{e_{11}+\xi_{e_{12}}}, \cdots, \xi_{e_{11}} + \xi_{e_{12}} + \cdots + \xi_{e_{1,l_1}}$, 这 l_1 个向量来自 $R(\lambda_1)$ 的不同直和项，它们是属于 λ_1 的线性无关的特征向量. 又因为

$$r(\lambda_1 E_{e_j} - J_{\lambda_j, e_j}) = \begin{cases} e_i - 1; 1 \leq j \leq l_1 \\ e_i; l_1 < j < k \end{cases}$$

故 $r(\lambda_1 E - J) = n - l_1$, 所以 $\mathrm{dim} V_{\lambda_1} = l_1$. 这样 $\xi_{e_{11}}, \xi_{e_{11}+\xi_{e_{12}}}, \cdots, \xi_{e_{11}} + \xi_{e_{12}} + \cdots + \xi_{e_{1,l_1}}$ 构成 $\mathrm{dim} V_{\lambda_1}$ 的一个基.

这样，我们知道 φ 的 Jordan 标准形中属于特征值 λ_i 的 Jordan 块的个数等于 λ_i 的几何重数.

现在介绍 Jordan-Chevalley 分解定理.

定理 7.6.3(Jordan-Chevalley **分解定理**) 设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，则存在唯一的一对线性变换 ψ 和 δ, 使得：

(1) $\varphi = \psi + \delta$, 其中 ψ 是可对角化的线性变换， δ 是幂零线性变换，且 $\psi\delta = \delta\psi$;

(2) 存在 $g(\lambda), h(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$, 使得 $\psi = g(\varphi)$, $\delta = h(\varphi)$.

证明 设 φ 的极小多项式为

$$m_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{s_1}(\lambda - \lambda_2)^{s_2} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{s_t},$$

则有

$$V = R(\lambda_1) \oplus R(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus R(\lambda_t),$$

其中 $R(\lambda_i) = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{s_i}$, $(i = 1, 2, \cdots, t)$.

由于 $(\lambda - \lambda_1)^{s_1}, (\lambda - \lambda_2)^{s_2}, \cdots, (\lambda - \lambda_t)^{s_t}$ 两两互素，根据中国剩余定理，存在多项式 $g(\lambda)$ 和 $q_i(\lambda), (i = 1, 2, \cdots, t)$, 使得对任意的 $i(1 \le i \le t)$,

$$g(\lambda) - \lambda_i = q_i(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{s_i}.$$

记 $h(\lambda) = \lambda - g(\lambda)$. 令 $\psi = g(\varphi)$, $\delta = h(\varphi)$, 则显然有

$$\varphi = \psi + \delta, \quad \psi\delta = \delta\psi.$$

对于任意的 $\alpha_i \in R(\lambda_i)$, 即 $\alpha_i \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{s_i}$, 有

$$(g(\varphi) - \lambda_i \mathrm{id}_V)(\alpha_i) = q_i(\varphi)(\varphi - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{s_i}(\alpha_i) = 0,$$

故 $g(\varphi)(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i, (i = 1, 2, \cdots, t)$. 这样 $g(\varphi)$ 可对角化.

对于任意的 $\alpha_i \in R(\lambda_i)$, 因为 $g(\varphi)(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i$, 所以

$$\delta^{s_i}(\alpha_i) = (\varphi - g(\varphi))^{s_i}(\alpha_i) = (\varphi - \lambda_i id)^{s_i}(\alpha_i) = 0.$$

取 $s = \max\{s_1, s_2, \cdots, s_t\}$, 则有 $\delta^s = 0$. 因此 δ 是幂零的线性变换.

下面证明唯一性. 设另有满足条件的分解 $\varphi = \psi_1 + \delta_1$. 因为 ψ, ψ_1 和 δ, δ_1 都是 φ 的多项式，所以显然 ψ_1 和 ψ 可交换，δ_1 和 δ 可交换. 由于 $\psi\psi_1 = \psi_1\psi$, 故 ψ 和 ψ_1 可同时对角化, 即 $\psi - \psi_1$ 可对角化. 另一方面，由于 $\delta\delta_1 = \delta_1\delta$ 和 δ, δ_1 的幂零性可推出 $\delta_1 - \delta$ 也是幂零的线性变换. 事实上，若 $\delta^s = 0, \delta_1^t = 0$, 则 $(\delta_1 - \delta)^{s+t} = 0$. 这样 $\psi - \psi_1 = \delta_1 - \delta$ 既是可对角化，又是幂零的，只能为零. 故 $\psi_1 = \psi$, $\delta_1 = \delta$. □

定理 7.6.3 用矩阵的语言来说，就是：设 A 是 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵. 则 A 可分解为 $A = B + C$, 其中 C 是幂零阵， B 相似于对角阵， B 和 C 都是 A 的多项式，且 $CB = BC$, 并且这种分解是唯一的.

下面介绍 Jordan 标准形应用的几个例子.

例 1 求证： $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵 A 必可分解为两个对称阵的乘积，其中一个是可逆阵.

证明 设 A 的 Jodan 标准形为

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1, e_1) & & & \\ & J(\lambda_2, e_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_k, e_k) \end{pmatrix},$$

即存在可逆阵 P, 使得 $A = PJP^{-1}$.

对于每个若当小块 $J(\lambda_i, e_i)$, 有

$$J(\lambda_i, e_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & \lambda_i \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & \cdots & \cdots & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ \lambda_i & 1 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix},$$

令

$$S(\lambda_i, e_i) = \begin{pmatrix} & & & & \lambda_i \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & \cdots & \cdots & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ \lambda_i & 1 & & & \end{pmatrix}, \quad N(e_i) = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix},$$

则 $J(\lambda_i, e_i) = S(\lambda_i, e_i)N(e_i)$, 且 $S(\lambda_i, e_i)$ 和 $N(e_i)$ 均为对称阵. 令

$$S = \begin{pmatrix} S(\lambda_1, e_1) & & & \\ & S(\lambda_2, e_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & S(\lambda_k, e_k) \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} N(e_1) & & & \\ & N(e_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & N(e_k) \end{pmatrix},$$

则

$$A = PJP^{-1} = PSNP^{-1} = (PSP^T)(P^{-1})^T NP^{-1},$$

显然 PSP^T 是对称阵, $(P^{-1})^T NP^{-1}$ 为可逆的对称矩阵, 证毕.

例 2 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = 0$, $r(A) = r > 0$, 求 A 的初等因子组.

解 设 λ 是 A 的特征值, 因为 $A^2 = 0$, 所以 $\lambda^2 = 0$. 故 A 的特征值全为零. 所以 A 相似于

$$J = \begin{pmatrix} J(0, e_1) & & & \\ & J(0, e_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(0, e_k) \end{pmatrix}.$$

由 $A^2 = 0$ 可得 $J^2 = 0$. 进一步 $J(0, e_i)^2 = 0 (i = 1, 2, \cdots, k)$. 所以 e_i 或等于 1 或 2. 又 $r(A) = r$, 所以有 r 个 $J(0, 2)$, 其余 $n - 2r$ 个 $J(0, 1) = 0$. 故 A 的初等因子组为 $\lambda, \cdots, \lambda(n-2r个), \lambda^2, \cdots, \lambda^2(r个)$.

习题

1. 设有理数域上 $f_A(\lambda)$ 的所有不可约因子是 $\lambda^2 + \lambda + 1, \lambda^2 - 2$. 而 $\deg m_A(\lambda) = 4$. 求证：在复数域上 A 必相似于对角阵.

2. 设 A 是非零 n 阶方阵满足 $A^2 = A$, $r(A) = r$, 求 A 的 Jordan 标准形.

3. 设 A 是复数域上 n 阶方阵满足 $A^2 = E$, 求 A 的 Jordan 标准形.

4. 设复数域上 n 阶方阵 A 只有一个特征值 1, 且只有一个线性无关的特征向量, 求 A 的 Jordan 标准形.

5. 设复数域上 n 阶不可逆方阵 A 不是幂零阵. 求证: A 相似于下面矩阵

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

其中 B 为幂零阵, C 为可逆阵.

6. 设 A 是复数域上 n 阶方阵. 证明 $r(A)=r$ 的充分必要条件是 A 的形如 λ^k 的初等因子恰有 $n-r$ 个.

复习题

1. 设 F,K 是两个数域且 $F\subseteq K$. 若 A,B 是两个数域 F 上的 n 阶方阵. 求证: A,B 在 F 上相似的充分必要条件是 A,B 在 K 上相似.

2. 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵, A 的行列式因子是 $1,\cdots,1,(n-1\text{个}1),f(\lambda)$, 其中

$$f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0.$$

求证: 若 A 的特征多项式等于 A 的极小多项式.

3. 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵. 求证: 若 A 的特征多项式等于 A 的极小多项式, 则 A 的 Frobenius 标准形是一个 Frobenius 块.

4. 设 φ,ψ 是数域 F 上的 n 维线性空间 V 上的线性变换, 且 φ 在 V 的一个基下的矩阵是一个 Frobenius 块. 求证: $\varphi\psi=\psi\varphi$ 的充分必要条件是 ψ 是 φ 的某个多项式 $h(\varphi)$, 其中 $\deg h(\lambda)<n$.

5. 求证:

$$\begin{pmatrix} F((\lambda-2)^2(\lambda^2+2)) & 0 \\ 0 & F((\lambda-2)^2(\lambda^2+2)^2) \end{pmatrix}$$

相似于

$$\begin{pmatrix} F((\lambda-2)^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F((\lambda-2)^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F(\lambda^2+2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F((\lambda^2+2)^2) \end{pmatrix}.$$

6. $f_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+5)^4, m_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+5)^2$, 写出 A 的 Jordan 标准形.

7. A,B 是 $\mathbb{C}$ 上 3 阶方阵, 求证 A 相似于 B 的充分必要条件是 $m_A(\lambda)=m_B(\lambda)$ 且 $f_A(\lambda)=f_B(\lambda)$. 当 A,B 为 4 阶矩阵时, 情况如何?

8. 设 φ 是复数域上 n 维空间 V 的线性变换, A 是 φ 在某个基下的矩阵. 求证: V 的每个根子空间都是循环子空间的充分必要条件是 A 的第 n 个行列式因子 $D_n(\lambda)$ 和第 n 个不变因子 $g_n(\lambda)$ 相等.

9. 设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换, $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 是 φ 的全部不同特征值, 且

$$V=R(\lambda_1)\oplus R(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus R(\lambda_t),$$

其中 $R(\lambda_i)$ 是 λ_i 的根子空间 $(i=1,2,\cdots,t)$. 设 W 是 V 的 φ- 子空间, 则

$$W=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_t,\quad W_i=W\cap R(\lambda_i).$$

10. 求 $J(0,n)^2$ 的 Jordan 标准形.

11. 设 λ_0 是复数域上 n 阶方阵 A 的 k 重特征值，求证： $r((\lambda_0 E - A)^k) = n - k$.

12. 设复数域上 n 阶方阵 A 满足 $r(A) = r(A^2)$. 求证： A 相似于下面矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

其中 C 为可逆阵.

13. 证明：与 $J(\lambda_0, n)$ 可交换的矩阵一定可以表为 $J(\lambda_0, n)$ 的多项式.