# 第七章　相似标准形

## §7.5 Jordan 标准形

本节仅在 $\mathbb{C}$ 上讨论. 因为多项式在复数域上总可以分解成为一次多项式的乘积. 所以 $\mathbb{C}$ 上 $n$ 阶方阵 $A$ 的初等因子形如 $(\lambda-\lambda_0)^e$, $J((\lambda-\lambda_0)^e)$ 形为

$$J((\lambda-\lambda_0)^e)=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & \\ 1 & \lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0\end{pmatrix},$$

易见，$J((\lambda-\lambda_0)^e)$ 的行列式因子为

$$1,1,\cdots,1(e-1\text{个}1),(\lambda-\lambda_0)^e,$$

不变因子为

$$1,1,\cdots,1(e-1\text{个}1),d_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^e,$$

初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_0)^e.$$

我们称 $J((\lambda-\lambda_0)^e)$ 为属于 $\lambda_0$ 的 $e$ 阶 Jordan **块**, 简记为 $J(\lambda_0,e)$. 易见,

$$f_{J(\lambda_0,e)}=m_{J(\lambda_0,e)}=(\lambda-\lambda_0)^e.$$

下面定理是本节的主结论，它由定理 7.4.3 直接得到.

**定理** 7.5.1 设 $A$ 是 $\mathbb{C}$ 上的矩阵且 $A$ 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{e_1},(\lambda-\lambda_2)^{e_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{e_k},$$

则 $A$ 相似于分块对角阵

$$J=\begin{pmatrix}J(\lambda_1,e_1) & & & \\ & J(\lambda_2,e_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_k,e_k)\end{pmatrix}.$$

我们称 $J$ 为 $A$ 的 Jordan **矩阵**, 或称 $A$ 的 Jordan **标准形**.

因为 $A$ 的初等因子组是唯一确定的，所以在不考虑 Jordan 块的排列次序前提下，$A$ 的 Jordan 标准形是唯一确定的. 同时我们看到，Jordan 标准形和初等因子组互相唯一确定.

**例** 1 上节例 4 中， $A$ 在 $\mathbb{C}$ 上初等因子组为

$$(\lambda-2)^2,(\lambda+\sqrt{2}i),(\lambda-\sqrt{2}i),(\lambda-2)^2,(\lambda+\sqrt{2}i)^2,(\lambda-\sqrt{2}i)^2.$$

所以 $A$ 的 Jordan 标准形为

$$J=\begin{pmatrix} J(2,2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J(2,2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J(-\sqrt{2}i,1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J(\sqrt{2}i,1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J(-\sqrt{2}i,2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J(\sqrt{2}i,2) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & & & & & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & & \\ & & 1 & 2 & & & & & & \\ & & & & -\sqrt{2}i & & & & & \\ & & & & & \sqrt{2}i & & & & \\ & & & & & & -\sqrt{2}i & 0 & & \\ & & & & & & 1 & -\sqrt{2}i & & \\ & & & & & & & & \sqrt{2}i & 0 \\ & & & & & & & & 1 & \sqrt{2}i \end{pmatrix}.$$

在同构的意义下，我们有

**定理** 7.5.2 设 $\varphi$ 是 $\mathbb{C}$ 上 $n$ 维线性空间 $V$ 上的线性变换，则必存在 $V$ 的一个基， $\varphi$ 在这个基下的矩阵为 Jordan 阵.

现在考虑矩阵 $A$ 的特征多项式和极小多项式与 Jordan 矩阵的关系.

**定理** 7.5.3 设 $\mathbb{C}$ 上的 $n$ 阶方阵 $A$ 的不同特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$,

(1)

$$f_A(\lambda)=D_n(\lambda)=g_1(\lambda)g_2(\lambda)\cdots g_n(\lambda),$$

且等于 $A$ 的所有初等因子组的乘积. 记

$$f_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{n_t},$$

则 $n_i$ 为所有特征值为 $\lambda_i$ 的 Jordan 块的阶数之和，等于初等因子组中 $(\lambda-\lambda_i)$ 的次幂之和.

(2)

$$m_A(\lambda)=g_n(\lambda),$$

且等于 $A$ 的初等因子组中含不同的 $(\lambda-\lambda_i)$ 方幂项中次幂最高项之积. 记

$$m_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{s_1}(\lambda-\lambda_2)^{s_2}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{s_t},$$

则 $s_i$ 为所有特征值为 $\lambda_i$ 的 Jordan 块的最大的阶数，等于初等因子组中 $(\lambda-\lambda_i)$ 的最高次幂项的次数.

**推论** 7.5.1 设 $A$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 $n$ 阶方阵，则下面叙述是等价的.

(1) $A$ 相似于对角阵;

(2) $A$ 的初等因子全是一次的;
(3) $m_A(\lambda)$ 无重根.

**推论** 7.5.2 设 $A$ 是 $\mathbb{C}$ 上的 $n$ 阶方阵，则下列命题等价
(1) $A$ 相似于 $cE$;
(2) $m_A(\lambda)$ 为一次多项式;
(3) $A$ 的初等因子全是一次且相同.

**习题**

1. 已知矩阵 $A$ 的初等因子组如下，求矩阵 $A$ 的 Jordan 标准形.
(1) $(\lambda+1)^2, (\lambda-2), (\lambda-2)^3$;
(2) $(\lambda+\sqrt{2})^2, (\lambda+1), (\lambda+1)^2, (\lambda+1)^3$.

2. 求下列矩阵的 Jordan 标准形.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 求下列矩阵的行列式因子，不变因子，初等因子组和 Jordan 标准形.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. 设 $\mathbb{C}$ 上三阶方阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求出 $A$ 所有可能的 Jordan 标准形;
(2) 给出 $A$ 可对角化的充分必要条件.

5. 求矩阵

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & a & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准形，其中 $a \neq 0$.