第七章　相似标准形

§7.4 初等因子组，广义 Jordan 标准形

将 n 阶 $\lambda-$ 方阵 $A(\lambda)$ 的不变因子 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_m(\lambda)$ 在 F 上分解为不可约因式之积

$$\begin{gathered} d_1(\lambda)=p_1^{e_{11}}(\lambda)p_2^{e_{12}}(\lambda)\cdots p_t^{e_{1t}}(\lambda)\\ d_2(\lambda)=p_1^{e_{21}}(\lambda)p_2^{e_{22}}(\lambda)\cdots p_t^{e_{2t}}(\lambda)\\ \cdots\cdots\cdots\\ d_m(\lambda)=p_1^{e_{m1}}(\lambda)p_2^{e_{m2}}(\lambda)\cdots p_t^{e_{mt}}(\lambda)\end{gathered}$$

其中 $p_i(\lambda)$ 是首一的两两互素的不可约多项式，e_{ij} 是非负整数，$(0\le e_{1j}\le e_{2j}\le\cdots\le e_{mj}; j=1,2,\cdots,t)$.

定义 7.4.1 若上面分解式中的 $e_{ij}>0$, 则称 $p_j(\lambda)^{e_{ij}}$ 为 $A(\lambda)$ 的一个 **初等因子**, $A(\lambda)$ 的全体初等因子称为 $A(\lambda)$ 的 **初等因子组**. 将 n 阶数字矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda E-A$ 的初等因子称为 A 的初等因子，将 $\lambda E-A$ 的初等因子组称为 A 的初等因子组.

例 1 设 9 阶有理数域上的矩阵 A 的不变因子为

$$1,\cdots,1,(\lambda-1)(\lambda^2+1),(\lambda-1)^2(\lambda^2+1)(\lambda^2-2),$$

试分别写出 A 在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ 上的初等因子组.

解 在 $\mathbb{Q}$ 上的初等因子组为 $\lambda-1,\lambda^2+1,(\lambda-1)^2,\lambda^2+1,\lambda^2-2$;
在 $\mathbb{R}$ 上初等因子组为 $\lambda-1,(\lambda-1)^2,\lambda+\sqrt{2},\lambda-\sqrt{2},\lambda^2+1,\lambda^2+1$;
在 $\mathbb{C}$ 上初等因子组为 $\lambda-1,(\lambda-1)^2,\lambda+\sqrt{2},\lambda-\sqrt{2},\lambda+i,\lambda-i,\lambda+i,\lambda-i$.

由定义，$\lambda-$ 矩阵的初等因子组由其不变因子唯一确定，反之，有

定理 7.4.1 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子由其初等因子组和秩 $r(A(\lambda))$ 唯一确定.

证明 对给定的初等因子组 $p_j^{e_{ij}}(\lambda)$. 设 $r(A(\lambda))=r$. 则对于不可约多项式 $p_j(\lambda)$, 初等因子组中含 $p_j^{e_{ij}(\lambda)}$ 中 e_{ij} 不为零的个数小于或等于 r. 在初等因子组 $p_j^{e_{ij}(\lambda)}$ 中适当增加一些 $p_j^{e_{ij}}(\lambda)$, $e_{ij}=0$, 则可将这组初等因子按降幂排列如下：

$$\begin{array}{ll} p_1^{e_{r1}}(\lambda),p_1^{e_{r-1,1}}(\lambda),\cdots,p_1^{e_{11}}(\lambda), & e_{r1}\ge e_{r-1,1}\ge\cdots\ge e_{11}\\ p_2^{e_{r2}}(\lambda),p_2^{e_{r-1,2}}(\lambda),\cdots,p_2^{e_{12}}(\lambda), & e_{r2}\ge e_{r-1,2}\ge\cdots\ge e_{12}\\ \cdots & \cdots\\ p_t^{e_{rt}}(\lambda),p_t^{e_{r-1,t}}(\lambda),\cdots,p_t^{e_{1t}}(\lambda), & e_{rt}\ge e_{r-1,t}\ge\cdots\ge e_{1t}\end{array}$$

记

$$\begin{array}{l} d_r(\lambda)=p_1^{e_{r1}}(\lambda)p_2^{e_{r2}}(\lambda)\cdots p_t^{e_{rt}}(\lambda),\\ d_{r-1}(\lambda)=p_1^{e_{r-1,1}}(\lambda)p_2^{e_{r-1,2}}(\lambda)\cdots p_t^{e_{r-1,t}}(\lambda),\\ \cdots\cdots\cdots\\ d_1(\lambda)=p_1^{e_{11}}(\lambda)p_2^{e_{12}}(\lambda)\cdots p_t^{e_{1t}}(\lambda),\end{array}$$

则 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda), (i=1,2,\cdots,r-1)$. 故 $d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda)$, $\cdots$, $d_r(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的不变因子. $\square$

推论 7.4.1 数字矩阵 A 的不变因子由其初等因子组唯一确定.

推论 7.4.2 矩阵 A 相似于 B 的充分必要条件是 A, B 有相同的初等因子组.

例 2 设 $\mathbb{Q}$ 上 12 阶矩阵 A 在 $\mathbb{C}$ 上的初等因子组为

$$(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda+1), (\lambda+1), (\lambda-i)^2, (\lambda+i)^2,$$

则 A 在 $\mathbb{Q}$ 上的不变因子为

$$1, 1, \cdots, 1, (9\text{ 个}), (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2(\lambda+1), (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2.$$

从上面的讨论知，从不变因子可以求得初等因子组．下面介绍的方法说明，只要将 $A(\lambda)$ 经过初等变换化为对角阵，再对对角元素做多项式因式分解就可以了．

引理 7.4.1 设

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix}, \quad B(\lambda)=\begin{pmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda) \end{pmatrix},$$

如果

$$(f_1(\lambda), g_1(\lambda)) = (f_1(\lambda), g_2(\lambda)) = (f_2(\lambda), g_1(\lambda)) = (f_2(\lambda), g_2(\lambda)) = 1,$$

则 $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$.

证明 显然 $A(\lambda), B(\lambda)$ 有相同的二阶行列式因子, 而 $A(\lambda), B(\lambda)$ 的一阶行列式因子分别为 $(f_1(\lambda)g_1(\lambda), f_2(\lambda)g_2(\lambda))$ 和 $(f_2(\lambda)g_1(\lambda), f_1(\lambda)g_2(\lambda))$. 根据第五章复习题 6, 知上面的两式均等于

$$(f_1(\lambda), f_2(\lambda))(g_1(\lambda), g_2(\lambda)).$$

因而 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 也有相同的一阶行列式因子，所以 $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$. $\square$

定理 7.3.2 设

$$A(\lambda) \simeq \begin{pmatrix} h_1(\lambda) & & & \\ & h_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

且

$$h_i(x) = p_1^{e_{i1}}(\lambda) p_2^{e_{i2}}(\lambda) \cdots p_t^{e_{it}}(\lambda),$$

其中 p_j 是首 1 的两两互素的不可约多项式 $(j=1,2,\cdots,t)$ 且 $e_{ij} \geq 0 (i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,t)$. 则

$$\{p_{ij}^{e_{ij}}(\lambda) \mid e_{ij} > 0, i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,t\}$$

是 $A(\lambda)$ 的初等因子组.

证明 先对 $p_1(\lambda)$ 的方幂进行讨论．令

$$g_i(\lambda) = p_2^{e_{i2}}(\lambda) p_3^{e_{i3}}(\lambda) \cdots p_t^{e_{it}}(\lambda),$$

$i=1,2,\cdots,n$. 则 $h_i(\lambda)=p_1^{e_{i1}}(\lambda)g_i(\lambda)$, $i=1,2,\cdots,n$, 而且 $(p_1^{e_{i1}}(\lambda),g_j(\lambda))=1$, $i,j=1,2,\cdots,n$. 如果相邻的一对指数满足 $e_{i1}>e_{i+1,1}$, 则将 $p_1^{e_{i1}}(\lambda)$ 与 $p_1^{e_{i+1,1}}(\lambda)$ 对调位置，而其余因式保持不动，根据引理 7.4.1,

$$\mathrm{diag}(p_1^{e_{i1}}(\lambda)g_i(\lambda),p_1^{e_{i+1,1}}(\lambda)g_{i+1}(\lambda))\cong\mathrm{diag}(p_1^{e_{i+1,1}}(\lambda)g_i(\lambda),p_1^{e_{i1}}(\lambda)g_{i+1}(\lambda)),$$

所以 $A(\lambda)$ 相抵于

$$\mathrm{diag}(p_1^{e_{11}}(\lambda)g_1(\lambda),\cdots,p_1^{e_{i+1,1}}(\lambda)g_i(\lambda),p_1^{e_{i1}}(\lambda)g_{i+1}(\lambda),\cdots,p_1^{e_{n1}}(\lambda)g_n(\lambda)).$$

继续如上的讨论,直到对角阵主对角线元素所含 $p_1(\lambda)$ 的方幂是按递升排列为止.依次对 $p_2(\lambda),p_3(\lambda),\cdots,p_t(\lambda)$ 的次幂作同样处理，最后便得到与 $A(\lambda)$ 相抵的对角矩阵，它的主对角线元素所含每个相同的 $p_i(\lambda)$ 的方幂都是按升幂排列的．这时对角元素就是 A 的不变因子，

$$\{p_j(\lambda)^{e_{ij}}\mid e_{ij}>0,i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,t\}$$

就是 $A(\lambda)$ 的初等因子组. $\square$

例 3 设

$$\lambda E-A\simeq\begin{pmatrix}1&&&&\\&(\lambda-1)^2(\lambda+2)&&&\\&&(\lambda+2)&&\\&&&1&\\&&&&(\lambda-1)\end{pmatrix},$$

则 A 的初等因子组为 $(\lambda-1),(\lambda+2),(\lambda+2),(\lambda-1)^2$.

利用初等因子组，我们可以构造 n 阶方阵 A 的广义 Jordan 标准形.

引理 7.4.2 设 $p(\lambda)$ 是数域 F 上 m 次不可约多项式， $F(p(\lambda))$ 是关于 $p(\lambda)$ 的 Frobenius 块. 令

$$C=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

是 m 阶方阵，则 sm 阶方阵

$$J=\begin{pmatrix}F(p(\lambda))&0&0&\cdots&0&0\\C&F(p(\lambda))&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&F(p(\lambda))&0\\0&0&0&\cdots&C&F(p(\lambda))\end{pmatrix}$$

的行列式因子和不变因子是 $1,\cdots,1(sm-1\text{个}1),p^s(\lambda)$, 初等因子组是 $p^s(\lambda)$.

证明 $\lambda E-J$ 的一个次对角线的元素乘积是 1. 因此对于任意的 $k(1\le k<sm)$, $\lambda E-J$ 有一个 k 阶子式为 1. 因为 $\det(\lambda-F)=p(\lambda)$, 所以 $D_{sm}(\lambda)=g_{sm}(\lambda)=p^s(\lambda)$. $\square$

引理 7.4.2 中矩阵 J 称为关于 $p^s(\lambda)$ 广义 Jordan 块，记为 $J(p^s(\lambda))$.

定理 7.4.3 设 A 的初等因子组为 $p_1^{e_1}(\lambda), p_2^{e_2}(\lambda), \cdots, p_m^{e_m}(\lambda)$, 则 A 相似于分块对角阵

$$J = \begin{pmatrix} J(p_1^{e_1}(\lambda)) & & & \\ & J(p_2^{e_2}(\lambda)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(p_m^{e_m}(\lambda)) \end{pmatrix}.$$

我们称 J 为 A 的 **广义** Jordan **阵**, 或称 A 的 **广义** Jordan **标准形**.

证明 因为 A 与 J 有相同的初等因子组. □

因为 A 的初等因子组是唯一确定的，所以在不考虑广义 Jordan 块的排列次序， A 的广义 Jordan 标准形是唯一确定的．同时我们看到，广义 Jordan 标准形和初等因子组互相唯一确定.

例 4 设有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 10 阶方阵 A 的不变因子为

$$1, \cdots, 1, (\lambda-2)^2(\lambda^2+2), (\lambda-2)^2(\lambda^2+2)^2.$$

则 A 的广义 Jordan 标准形为

$$J = \begin{pmatrix} J((\lambda-2)^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J((\lambda-2)^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J(\lambda^2+2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J((\lambda^2+2)^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & & & & & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & & \\ & & 1 & 2 & & & & & & \\ & & & & 0 & -2 & & & & \\ & & & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & & & 0 & -2 & & \\ & & & & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & 0 & -2 \\ & & & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

习题

1. 已知 $A(\lambda)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的不变因子为 $1, \cdots, 1, \lambda, \lambda(\lambda^2-2), \lambda(\lambda^2-2)^2(\lambda^2+1), \lambda^2(\lambda^2-2)^4(\lambda^2+1)^2(\lambda-9)$, 写出 $A(\lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的初等因子组.

2. 已知 5 阶 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 4, 初等因子组为 $\lambda, \lambda^2, \lambda^2, \lambda+1, \lambda-1, \lambda-1, (\lambda+1)^3$. 求 $A(\lambda)$ 的行列式因子和不变因子.

3. 求下列矩阵的初等因子组.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ -2 & \lambda-2 & 1 \\ -1 & -2 & \lambda+1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}.$$

4. 设

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda+1 & \\ & \lambda-1\end{pmatrix},\quad B(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda^2-1 & \\ & 1\end{pmatrix},$$

求 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 的初等因子组，问 $A(\lambda)$ 是否相抵于 $B(\lambda)$.

5. 写出例 2 中矩阵 A 分别在 $\mathbb{Q}$ 上和 $\mathbb{C}$ 上的 Frobenius 标准形和广义 Jordan 标准形.

6. 写出例 4 中矩阵 A 在 $\mathbb{C}$ 上的 Frobenius 标准形和广义 Jordan 标准形.