第七章　相似标准形

§7.3 不变因子， Frobenius 标准形

由上节我们知道任意 $\lambda-$ 方阵都相抵于对角 $\lambda-$ 矩阵. 所以，如果两个 n 阶 $\lambda-$ 矩阵的法式相同，则它们相抵. 反之，如果它们法式不一样，是否必不相抵？为此，先引进行列式因子的概念.

定义 7.3.1 设 $A(\lambda)$ 是 n 阶 $\lambda-$ 矩阵，对于任意的 $k(1 \leq k \leq n)$, 如果 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式的最大公因式不等于零，则称首项系数是 1 的最大公因式为 $A(\lambda)$ 的 k **阶行列式因子**, 记为 $D_k(\lambda)$.

易见，若 $r(A(\lambda)) = r$, 则 $A(\lambda)$ 有 r 个行列式因子.

例 1 矩阵

$$\begin{pmatrix} (\lambda-1) & & \\ & (\lambda+1) & \\ & & (\lambda-1) \end{pmatrix}$$

的行列式因子为 $1, \lambda-1, (\lambda-1)^2(\lambda+1)$;

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & (\lambda-1) & \\ & & (\lambda-1)(\lambda+1) \end{pmatrix}$$

的行列式因子为 $1, \lambda-1, (\lambda-1)^2(\lambda+1)$;

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & (\lambda+1) & \\ & & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$$

的行列式因子为 $1, 1, (\lambda-1)^2(\lambda+1)$.

例 2 n 阶 $\lambda-$ 矩阵的法式

$$\mathrm{diag}(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0),$$

则其行列式因子为

$D_1(\lambda) = d_1(\lambda)$,

$D_2(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)$,

$\cdots\cdots\cdots$

$D_r(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda)$.

引理 7.3.1 设 $r(A(\lambda)) = r$, $D_1(\lambda)$,$D_2(\lambda)$,$\cdots$, $D_r(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的行列式因子，则

$$D_i(\lambda) | D_{i+1}(\lambda) \quad (i = 1, 2, \cdots, r-1).$$

证明 设 $A_{i+1}(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的任一 $i+1$ 阶子式, 按第一行展开, 则其每一展开项都是一个多项式与 $A(\lambda)$ 一个 i 阶子式的乘积. 由于 $D_i(\lambda)$ 是所有 i 阶子式的公因式, 则 $D_i(\lambda)|A_{i+1}(\lambda)$. 因此 $D_i(\lambda)|D_{i+1}(\lambda)$. □

定义 7.3.2 设 $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$, $\cdots$, $D_r(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的行列式因子, 则

$$g_1(\lambda) = D_1(\lambda), \quad g_i(\lambda) = \frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}, \quad i = 2, 3, \cdots, r.$$

称为 $A(\lambda)$ 的 **不变因子**.

显然, $\lambda-$ 矩阵的行列式因子和不变因子互相唯一确定. 例 1 中不变因子分别为 $1, \lambda-1, (\lambda+1)(\lambda-1); 1, \lambda-1, (\lambda+1)(\lambda-1); 1, 1, (\lambda+1)(\lambda-1)^2$. 例 2 中 n 阶 $\lambda-$ 矩阵的法式的不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$.

为了证明行列式因子, 不变因子都是 $\lambda-$ 矩阵在相抵关系下的不变量, 先证明如下结论.

定理 7.3.1 相抵的 $\lambda-$ 矩阵有相同的行列式因子.

证明 只需证明行列式因子在任意 $\lambda-$ 矩阵的初等变换下保持不变即可.

互换变换. 交换 $A(\lambda)$ 的两行得到 $B(\lambda)$, 则 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 的 s 阶子式最多改变一个符号, 因为行列式因子首项系数为 1, 所以保持不变.

倍法变换. $A(\lambda)$ 的某一行乘以非零常数得到 $B(\lambda)$, 则 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 的 s 阶子式与变换后的 i 阶子式最多差一个非零常数, 因为行列式因子首项系数为 1, 所以保持不变.

消法变换. $A(\lambda)$ 的第 j 行乘以 $f(\lambda)$ 加到第 i 行得到 $B(\lambda)$. 如果 $B(\lambda)$ 的 s 阶子式不含第 i 行, 或同时含第 i 行和第 j 行, 它等于 $A(\lambda)$ 的相应的一个 s 阶子式. 如果 $B(\lambda)$ 的 s 阶子式含第 i 行但不含第 j 行, 它等于 $A(\lambda)$ 的相应的一个 s 阶子式加减 $f(\lambda)$ 乘以 $A(\lambda)$ 的另一个 s 阶子式. 所以不影响所有 s 阶子式的最大公因式. □

注 $\lambda-$ 矩阵的法式唯一.

定理 7.3.2 对于 n 阶 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$, 下列叙述是等价的.
(1) $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$;
(2) $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 有相同的行列式因子;
(3) $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 有相同的不变因子;
(4) $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 有相同的法式.

证明 设 $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$, 根据定理 7.3.1, $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 有相同的行列式因子, 因而有相同的不变因子. 因为法式由不变因子唯一确定, 所以 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 有相同的法式. 而两个法式相同的 $\lambda-$ 矩阵是相抵的. □

设 A 是数域 F 上 n 阶方阵, 多项式矩阵 $\lambda E - A$ 称为矩阵 A 的 **特征矩阵**. $\lambda E - A$ 的行列式因子和不变因子分别称为 A 的 **行列式因子** 和 **不变因子**.

推论 7.3.1 对于 n 阶方阵 A 和 B, 下列叙述是等价的.
(1) A 相似于 B;
(2) A 和 B 有相同的行列式因子;
(3) A 和 B 有相同的不变因子.

利用不变因子, 我们可以构造 n 阶方阵的 Frobenius 标准形.

引理 7.3.2 下列 r 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}_r$$

的行列式因子是 $1, \cdots, 1, (r-1\text{个}1), f(\lambda)$, 其中

$$f(\lambda) = \lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

其不变因子也是 $1, \cdots, 1(r-1\text{个}1), f(\lambda)$.

证明 对任意的 $k(k < r)$, 上面矩阵的特征矩阵总有一个 k 阶子式的值为 $(-1)^k$, 故 $D_k(\lambda) = 1$, $1 \leq k \leq r-1$. 而其 r 阶行列式因子是

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda - a_{r-1} \end{vmatrix} = \lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

□

引理 7.3.2 中矩阵称为关于 $f(\lambda) = \lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ 的 Frobenius **块**, 记为 $F(f(\lambda))$.

定理 7.3.3

$$F(f(\lambda)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}$$

的特征多项式和极小多项式都是

$$f(\lambda) = \lambda^r + a_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

证明 记 $F(f(\lambda))$ 为 F. 因为 F 的特征多项式是第 r 个行列式因子, 所以是 $f(\lambda)$. 所以 $f(\lambda)$ 是 F 的零化多项式. 我们断言 F 的极小多项式也是 $f(\lambda)$. 若不然, 有 $g(\lambda)$, 使 $g(F) = 0$, 且 $\deg g(\lambda) < \deg f(\lambda)$. 设

$$g(\lambda) = \lambda^s + l_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + l_i\lambda + l_0, \quad s < r,$$

则 $g(F) = F^s + l_{s-1}F^{s-1} + \cdots + l_1F + l_0E = 0$. 从而 $g(F)\varepsilon_1 = 0$. 直接计算知 $F\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $F^2\varepsilon_1 = \varepsilon_3$, $\cdots$, $F^s\varepsilon_1 = \varepsilon_{s+1}$. 所以 $g(F)\varepsilon_1 = \varepsilon_{s+1} + l_{s-1}\varepsilon_s + \cdots + l_1\varepsilon_2 + l_0\varepsilon_1 = 0$. 这样 $l_i = 0$, $(1 \leq i \leq s)$. 与 $g(\lambda) \neq 0$ 矛盾. □

定理 7.3.4 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵, A 的不变因子为

$$1, \cdots, 1(n-k\text{个}1), d_1(\lambda), \cdots, d_k(\lambda)$$

其中 $\deg d_i(\lambda)=m_i$, 则 A 相似于下列分块对角阵

$$F=\begin{pmatrix} F(d_1(\lambda)) & & & \\ & F(d_2(\lambda)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & F(d_k(\lambda)) \end{pmatrix}.$$

证明 $\lambda E-A$ 的法式为

$$\mathrm{diag}(1,\cdots,1(n-k\text{个}1),d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)).$$

因为 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$. 根据 §7.1 的例 2, 知

$$\lambda E-A\simeq \mathrm{diag}(1,\cdots,1(m_1-1\text{个}1),d_1(\lambda),1,\cdots,1(m_2-1\text{个}1),d_2(\lambda),\cdots,1,\cdots,1(m_k-1\text{个}1),d_k(\lambda)).$$

根据引理 7.3.1,

$$\mathrm{diag}(1,\cdots,1(m_i-1\text{个}1),d_i(\lambda))\simeq \lambda E-F(d_i(\lambda)),\quad 1\le i\le k.$$

所以

$$\lambda E-A\simeq \lambda E-F.$$

故 A 相似于 F. □

定理 7.3.4 中的 F 称为 A 的 Frobenius **标准形**.

例 3　设方阵 A 的不变因子是

$$1,1,1,(\lambda+1),(\lambda+1)^2,(\lambda+1)^3,$$

写出 A 的 Frobenius 标准形.

解 不变因子可写为

$$1,1,1,(\lambda+1),(\lambda^2+2\lambda+1),(\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1).$$

故 A 的 Frobenius 标准形为

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & 0 & -1 & & & \\ & 1 & -2 & & & \\ & & & 0 & & -1 \\ & & & 1 & 0 & -3 \\ & & & & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

例 4　求下列矩阵的 Frobenius 标准形

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

解

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-1 & -3 & -3\\ -3 & \lambda-1 & -3\\ 3 & 3 & \lambda+5\end{pmatrix}.$$

则 $D_1(\lambda)=1$. 计算得到 $D_2(\lambda)=\lambda+2$. 计算 $\det(\lambda E-A)$, 得到 $D_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)^2$. 故 A 的非 1 的不变因子为 $d_1(\lambda)=\lambda+2$, $d_2(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+2)$. 这样, A 的不变因子为

$$1,\lambda+2,\lambda^2+\lambda-2,$$

故 A 的 Frobenius 标准形为

$$\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 0 & 2\\ & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

定理 7.3.5 设数域 F 上 n 阶矩阵 A 的不变因子为

$$1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda),$$

则 A 的极小多项式 $m_A(\lambda)=d_k(\lambda)$.

证明 设 A 的 Frobenius 标准形为

$$F=\begin{pmatrix}F(d_1(\lambda)) & & & \\ & F(d_2(\lambda)) & & \\ & & \ddots & \\ & & & F(d_k(\lambda))\end{pmatrix},$$

因相似矩阵有相同的极小多项式, 故只需证明 F 的极小多项式是 $d_k(\lambda)$ 即可. 因为 F 为分块对角阵, 由定理 6.3.3 知

$$m_F(\lambda)=[m_{F(d_1(\lambda))},m_{F(d_2(\lambda))},\cdots,m_{F(d_k(\lambda))}]=[d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)].$$

又因为 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$, $1\le i\le k-1$, 故

$$m_A(\lambda)=m_F(\lambda)=d_k(\lambda).$$

□

习题

1. 对于任意 n 阶方阵 A, 求证: A 相似于 A^T.

2. 求下列矩阵的行列式因子和不变因子, 并写出 Frobenius 标准形.

(1) $\begin{pmatrix}4 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -2 & 2\\ -1 & -1 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

3. 问下列矩阵是否相似.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. 写出 A 的 Frobenius 标准形

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5. 设有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 10 阶方阵 A 的不变因子为

$$1, \cdots, 1, (\lambda-2)^2(\lambda^2+2), (\lambda-2)^2(\lambda^2+2)^2.$$

写出 A 的 Frobenius 标准形.

6. 设 n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值. 求证 A 的特征多项式与极小多项式相等, 并求 A 的 Frobenius 标准形.