第七章　相似标准形

§7.2 $\lambda-$ 矩阵的法式

为讨论 $\lambda-$ 矩阵在相抵关系的标准形，先给出如下引理.

引理 7.2.1 设 $A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$ 为一非零 $\lambda-$ 矩阵, 则 $A(\lambda)$ 必相抵于矩阵 $B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))_{m\times n}$, 其中 $b_{11}(\lambda)\neq 0$ 且 $b_{11}(\lambda)$ 整除 $B(\lambda)$ 中的任意元素 $b_{ij}(\lambda)$.

证明 因为 $A(\lambda)\neq 0$, 我们总可以经过 $\lambda-$ 矩阵的互换变换使得第 $(1,1)$ 元素非零. 我们不妨设 $a_{11}(\lambda)\neq 0$. 现在对 $\deg a_{11}(\lambda)$ 做数学归纳证明结论.

当 $\deg a_{11}(\lambda)=0$ 时, $a_{11}(\lambda)$ 为非零常数，必整除所有元素，结论成立.

假设当 $\deg a_{11}(\lambda)<t$ 时，结论成立. 考虑 $\deg a_{11}(\lambda)=t$ 情况. 若 $a_{11}(\lambda)$ 整除 $A(\lambda)$ 中任意元素 $a_{ij}(\lambda)$, 则结论成立. 我们设存在 $a_{ij}(\lambda)$ 不能被 $a_{11}(\lambda)$ 整除.

(1) 若 $j=1$, 即 $A(\lambda)$ 的第一列中有一个元素 $a_{i1}(\lambda)$, 满足

$$a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda),$$

其中 $\deg r(\lambda)<\deg a_{11}(\lambda)$. 将 $A(\lambda)$ 的第一行乘以 $-q(x)$ 加到第 i 行，再将第行和第 i 行互换，得到的 $\lambda-$ 矩阵中第 $(1,1)$ 元素是 $r(x)$, 满足 $\deg r(\lambda)<t$. 对得到的矩阵利用归纳假设得到结论.

(2) 若 $i=1$, 与情况 (1) 同理可证.

(3) 若 $a_{11}(\lambda)$ 整除第一行和第一列的所有元素，用消法变换，可得

$$A(\lambda)\simeq\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_{22}(\lambda) & \cdots & b_{2n}(\lambda)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b_{m2}(\lambda) & \cdots & b_{mn}(\lambda)\end{pmatrix}.$$

若 $a_{11}(\lambda)$ 整除所有的 $b_{ij}(\lambda)$ $(i=2,3,\cdots,m;j=2,3,\cdots,n)$, 则结论成立. 若存在 $a_{st}(\lambda)(2\leq s\leq m;2\leq t\leq n)$ 不能被 $a_{11}(\lambda)$ 整除，将第 t 列加到第一列，归结于情况 (1). □

定理 7.2.1 设 $A(\lambda)$ 是一个 n 阶 $\lambda-$ 矩阵且 $r(A(\lambda))=r$, 则

$$A(\lambda)\simeq\mathrm{diag}(d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda),0,\cdots,0),$$

其中 $d_i(\lambda)$ 为首一多项式 $(i=1,2,\cdots,r)$, 且 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)(i=1,2,\cdots,r-1)$.

证明 由引理 7.1.1,

$$A(\lambda)\simeq B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))_{m\times n},$$

其中 $b_{11}(\lambda)\neq 0$ 且 $b_{11}(\lambda)$ 整除 $B(\lambda)$ 中的所有元素 $b_{ij}(\lambda)$. 设 $b_{ij}(\lambda)=b_{11}(\lambda)q_{ij}(\lambda)$, 将 $B(\lambda)$ 的第一列乘以 $-q_{1j}(\lambda)$ 加到第 j 列, $j=2,3,\cdots,n$, 再将第一行乘以 $-q_{i1}(\lambda)$ 加到第 i 列, $i=2,3,\cdots,m$,

得到

$$A(\lambda) \simeq \begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22}(\lambda) & \cdots & c_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{m2}(\lambda) & \cdots & c_{mn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

其中 $c_{ij}(\lambda) = b_{ij}(\lambda) - q_{ij}(\lambda)b_{i1}(\lambda)(i = 2, 3, \cdots, m; j = 2, 3, \cdots, n)$. 不妨设 b_{11} 的首项系数为 1, 且记为 $d_1(\lambda)$. 则易见 $d_1(\lambda)|c_{ij}(\lambda)(i = 2, 3, \cdots, m; j = 2, 3, \cdots, n)$. 记

$$C_1(\lambda) = \begin{pmatrix} c_{22}(\lambda) & \cdots & c_{2n}(\lambda) \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m2}(\lambda) & \cdots & c_{mn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

则 $C_1(\lambda)$ 是 $(m-1)\times(n-1)$ 的 $\lambda-$ 矩阵. 对 $C_1(\lambda)$ 重复上面的步骤, 可使第二行第二列除第 $(2,2)$ 个元素 $d_2(\lambda)$ 外其余全为零, 且 $d_2(\lambda)$ 整除其余所有元素. 易知, $d_1(\lambda)|d_2(\lambda)$. 不断做下去, 直到除第 (i,i) 元素外的其它元素均为零. 与数字矩阵情形一样, 做 $\lambda-$ 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩. 所以对角元素有 r 个不等于零. □

定理中的 $\mathrm{diag}(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 **法式**.

推论 7.2.1 任一 n 阶可逆 $\lambda-$ 矩阵都可以表示为有限个初等 $\lambda-$ 矩阵之积.

证明 设 $A(\lambda)$ 是 n 阶可逆 $\lambda-$ 矩阵, 则存在 $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$, 使得

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = \mathrm{diag}(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0),$$

其中 $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$ 是有限个初等 $\lambda-$ 矩阵的乘积. 因为 $A(\lambda)$ 可逆, $r(A(\lambda)) = n$. 做 $\lambda-$ 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩, 所以 $r = n$. 且 $d_i(\lambda)$ 为非零常数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 因为 $d_i(\lambda)$ 首项系数为一, 所以 $d_i(\lambda) = 1(i = 1, 2, \cdots, n)$. 这样, $A(\lambda) = P(\lambda)^{-1}Q(\lambda)^{-1}$. 因为初等 $\lambda-$ 矩阵的逆为初等 $\lambda-$ 矩阵, 所以 $A(\lambda)$ 可表为有限个初等 $\lambda-$ 矩阵之积. □

习题

1. 用 $\lambda-$ 矩阵的初等变换的方法求下列矩阵的法式.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2\lambda-1 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+\lambda-1 & -\lambda^2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+2 \end{pmatrix}.$$

2. 设 $(f(\lambda), g(\lambda)) = 1$. 证明

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} g(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}.$$

3. 设 $A \in F^{n\times n}$. 证明:

(1)

$$(\lambda E - A) \simeq \mathrm{diag}(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)),$$

其中 $d_j(\lambda)(j = 1, 2, \cdots, n)$ 首项系数为 1, $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)(i = 1, 2, \cdots, n-1)$, 且 $f_A(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda)$.

(2) 上式中 $\mathrm{deg}d_1(x) \neq 0$ 的充分必要条件是 $A = aE_n$.