第七章　相似标准形

矩阵的若当标准形是 $\mathbb{C}$ 上矩阵在相似关系下的标准形. 若当标准形是矩阵理论的重要组成部分，也是高等代数课程最精华的部分. §7.1 讨论多项式矩阵的基础内容，证明数字矩阵的相似与它们的特征矩阵相抵的联系. §7.2 讨论多项式矩阵的矩阵的法式. §7.3 介绍数字矩阵的行列式因子，不变因子和初等因子，它们互相确定且是数字矩阵在相似关系下的不变量. §7.4 是本章的重点. $\mathbb{C}$ 上方阵都相似于若当标准形，若当标准形实质上由矩阵的初等因子组唯一确定. 这是本章的主结论. 对应的线性空间的分解理论，在第 §7.5 讨论，这同样是线性空间理论的精华内容.

§7.1 多项式矩阵

本章继续关注 n 阶方阵的相似标准形. 对应地，线性空间分解成为不变子空间的直和. 相似标准形比较复杂. 人们发现，两个矩阵 A, B 的相似和 $\lambda E-A$ 和 $\lambda E-B$ 的相抵有密切关系. 注意到，$\lambda E-A$ 形如

$$\begin{pmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{pmatrix},$$

其中元素含有未定元 λ. 一般地，设 F 是一个数域，形如

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

的 $m\times n$ 矩阵，其中 $a_{ij}(\lambda)\in F[\lambda](i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$, 称为 **多项式矩阵**, 或 $\lambda-$ 矩阵，也记为 $A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$.

一个多项式矩阵可以写为系数为数字矩阵的多项式，反之，一个系数为数字矩阵的多项式可以写为多项式矩阵. 如，

$$\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda+3 \\ 1 & \lambda^3+2\lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^3+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

与数字矩阵一样，$\lambda-$ 矩阵有相等，加法，数乘，乘法，只是将数的运算换成多项式的运算. 同样，有 $\lambda-$ 矩阵的行列式，伴随矩阵和秩的概念，它们和数字矩阵的定义相同. 下面考虑 $\lambda-$ 矩阵的相抵.

定义 7.1.1 对 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 施行的下列三种变换称为 $\lambda-$ 矩阵的 **行初等变换**.

(1) **互换变换**: 将 $A(\lambda)$ 矩阵两行互换;
(2) **倍法变换**: 将 $A(\lambda)$ 的第 i 行乘以非零常数 c;
(3) **消法变换**: 将 $A(\lambda)$ 的第 i 行乘以 $f(\lambda)$ 后加到第 j 行上去.

相应地，有 **列初等变换** 的定义.

定义 7.1.2 如果 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 经过有限次 $\lambda-$ 矩阵的初等变换后变为 $B(\lambda)$, 则称 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$**相抵**, 记作 $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$.

与数字矩阵一样， $\lambda-$ 矩阵的相抵关系满足 (1) 反身性，即 $A(\lambda) \simeq A(\lambda)$; (2) 对称性，即若 $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$, 则 $B(\lambda) \simeq A(\lambda)$; (3) 传递性，即若 $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$ 且 $B(\lambda) \simeq C(\lambda)$, 则 $A(\lambda) \simeq C(\lambda)$.

例 2 设

$$A(\lambda) = \mathrm{diag}(d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)),$$

$$B(\lambda) = \mathrm{diag}(d_1'(\lambda), d_2'(\lambda), \cdots, d_n'(\lambda)),$$

且 $d_1'(\lambda), d_2'(\lambda), \cdots, d_n'(\lambda)$ 是 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$ 的一个置换，则

$$A(\lambda) \simeq B(\lambda).$$

证明 只要做相应的互换变换即可.

与数字矩阵一样，对单位矩阵作一次 $\lambda-$ 矩阵初等变换所得到的矩阵称为 **初等** $\lambda-$ **矩阵**.
(1) **互换矩阵**: 将单位阵的第 i 行与第 j 行互换，记为 $E(i,j)$;
(2) **倍法矩阵**: 将单位阵的第 i 行乘以一个非零常数 c, 记为 $E(i(c))$;
(3) **消法矩阵**: 将单位阵的第 j 行乘以一个多项式 $f(x)$ 加到第 i 行，记为 $E(i,j(f(x)))$.

注意到 $\lambda-$ 矩阵的互换矩阵，倍法矩阵与数域上的互换矩阵，倍法矩阵一致．消法矩阵的形式如下

$$E(i,j(f(x))) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & f(x) & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array}.$$

同数字矩阵的证明一样，有

定理 7.1.1 设 $A(\lambda)$ 是 $m \times n$ 阶的 $\lambda-$ 矩阵，对 $A(\lambda)$ 作一次行的初等变换相当于左乘一个 m 阶相应 $\lambda-$ 初等矩阵，对 $A(\lambda)$ 作一次列的初等变换相当于右乘一个 n 阶相应的初等 $\lambda-$ 矩阵.

对于 n 阶 $\lambda-$ 方阵，可以定义可逆 $\lambda-$ 矩阵.

定义 7.1.3 若 $A(\lambda)$,$B(\lambda)$ 都是 n 阶 $\lambda-$ 矩阵，且

$$A(\lambda)B(\lambda) = E_n, \quad B(\lambda)A(\lambda) = E_n,$$

则称 $A(\lambda)$ 为 **可逆** $\lambda-$ **矩阵**, $B(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的逆 $\lambda-$ 矩阵，记为 $A^{-1}(\lambda)$.

与数字矩阵情况一样容易证明，若 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 的逆 $\lambda-$ 矩阵若存在，必唯一. 可逆 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 的乘积也是可逆 $\lambda-$ 矩阵，且 $(A(\lambda)B(\lambda))^{-1} = B^{-1}(\lambda)A^{-1}(\lambda)$.

直接验证, 知初等 $\lambda-$ 矩阵均可逆，$P(i,j)^{-1}=P(i,j)$, $P(i(c))^{-1}=P(i(c^{-1}))$, $P(i,j(f(\lambda)))^{-1}=P(i,j(-f(\lambda)))$. 易见， $\det P(i,j)=-1$, $\det P(i(c))=c$, $\det P(i,j(f(\lambda)))=1$.

定理 7.1.2 一个 n 阶 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充分必要条件是 $\det A(\lambda)$ 为一非零常数.

证明 充分性. 设 $\det A(\lambda)$ 为一非零常数，则矩阵 $\frac{1}{\det A(\lambda)}A(\lambda)^*$ 也是一个 $\lambda-$ 矩阵，其中 $A(\lambda)^*$ 是 $A(\lambda)$ 的伴随矩阵. 且

$$A(\lambda)\frac{1}{\det A(\lambda)}A(\lambda)^*=E_n=\frac{1}{\det A(\lambda)}A(\lambda)^*A(\lambda).$$

所以 $A(\lambda)$ 可逆且

$$A(\lambda)^{-1}=\frac{1}{\det A(\lambda)}A(\lambda)^*.$$

必要性. 因为

$$\det A(\lambda)\det B(\lambda)=\det E_n=1,$$

考虑到 $\det A(\lambda)$ 和 $\det B(\lambda)$ 都是 λ 的多项式，所以 $\det A(\lambda)$, $\det B(\lambda)$ 只能是零次多项式，故是非零常数. □

为讨论数字矩阵的相似与 $\lambda-$ 矩阵的相抵关系，需先证明一个有关 $\lambda-$ 矩阵带余除法的引理.

引理 7.1.1 设 $M(\lambda)$, $N(\lambda)$ 是非零 n 阶 $\lambda-$ 矩阵， B 为 n 阶数字矩阵, 则必存在 $\lambda-$ 矩阵 $Q(\lambda)$ 和 $S(\lambda)$ 以及数字矩阵 R 和 T, 使下式成立

$$M(\lambda)=(\lambda E-B)Q(\lambda)+R; \tag{1}$$

$$N(\lambda)=S(\lambda)(\lambda E-B)+T. \tag{2}$$

证明 将 $M(\lambda)$ 写为

$$M(\lambda)=M_m\lambda^m+M_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+M_1\lambda+M_0,$$

其中 $M_m\neq 0$.

我们对 m 用归纳法. 若 $m=0$, 取 $Q(\lambda)=0$, 已满足要求. 假设对任意小于 m 次的矩阵多项式 (1) 式成立. 令 $Q_1(\lambda)=M_m\lambda^{m-1}$, 则

$$M(\lambda)-(\lambda E-B)Q_1(\lambda)=(BM_m+M_{m-1})\lambda^{m-1}+M_{m-2}\lambda^{m-2}+\cdots+M_0$$

为一个次数小于 m 的矩阵多项式. 根据归纳假设，知存在 $\lambda-$ 矩阵 $Q_2(\lambda)$ 和数字矩阵 R, 使得

$$M(\lambda)-(\lambda E-B)Q_1(\lambda)=(\lambda E-B)Q_2(\lambda)+R.$$

所以 $M(\lambda)=(\lambda E-B)(Q_1(\lambda)+Q_2(\lambda))+R$. 令 $Q(\lambda)=Q_1(\lambda)+Q_2(\lambda)$, 即得结论 (1). 同理可证 (2) 式成立. □

定理 7.1.3 设 A,B 是数域 F 上的矩阵，则 A 相似于 B 的充分必要条件是 $\lambda E-A\simeq\lambda E-B$.

证明 必要性. 若 A 相似于 B, 则存在 F 上可逆矩阵 P, 使 $B=P^{-1}AP$. 所以

$$P^{-1}(\lambda E-A)P=\lambda E-P^{-1}AP=\lambda E-B.$$

把 P 看成是一常数 $\lambda-$ 矩阵，上式表明 $\lambda E-A \simeq \lambda E-B$.

充分性. 若 $\lambda E-A \simeq \lambda E-B$, 则存在可逆 $\lambda-$ 矩阵 $M(\lambda)$ 和 $N(\lambda)$, 使得

$$M(\lambda)(\lambda E-A)N(\lambda)=\lambda E-B.$$

将上式改写为

$$M(\lambda)(\lambda E-A)=(\lambda E-B)N^{-1}(\lambda).$$

由引理 7.1.1, 可设 $M(\lambda)=(\lambda E-B)Q(\lambda)+R$, 代入上式，整理得

$$R(\lambda E-A)=(\lambda E-B)[N^{-1}(\lambda)-Q(\lambda)(\lambda E-A)].$$

上式左边是一次多项式，故右式中 $N^{-1}(\lambda)-Q(\lambda)(\lambda E-A)$ 必须是零次的，即为数字矩阵，记为 P. 即

$$R(\lambda E-A)=(\lambda E-B)P.$$

整理，得

$$(R-P)\lambda=RA-BP.$$

再比较次数得 $R=P, RA=BP$, 即

$$PA=BP.$$

现在只须证数字矩阵 P 为可逆阵即可. 因为

$$P=N^{-1}(\lambda)-Q(\lambda)(\lambda E-A),$$

右乘 $N(\lambda)$, 得

$$PN(\lambda)+Q(\lambda)(\lambda E-A)N(\lambda)=E.$$

而由于 $(\lambda E-A)N(\lambda)=M^{-1}(\lambda)(\lambda E-B)$, 所以 $PN(\lambda)+Q(\lambda)M^{-1}(\lambda E-B)=E$. 由引理 7.1.1, 可设 $N(\lambda)=S(\lambda)(\lambda E-B)+T$, 代入上式整理后，得

$$[PS(\lambda)+Q(\lambda)M^{-1}(\lambda)](\lambda E-B)+PT=E.$$

比较次数，即知 $PS(\lambda)+Q(\lambda)M^{-1}(\lambda)(\lambda)=0$, 故 $PT=E$, 即 P 为可逆阵. □

习题

1. 若 $A(\lambda)\simeq C(\lambda)$, $B(\lambda)\simeq D(\lambda)$, 证明：

$$\begin{pmatrix} A(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} C(\lambda) & 0 \\ 0 & D(\lambda) \end{pmatrix}.$$