第七章　相似标准形

§1 $\lambda-$ 矩阵

教学目的与要求 掌握多项式矩阵 ($\lambda-$ 矩阵) 的定义以及和矩阵多项式的关系；理解初等 $\lambda-$ 阵的定义；掌握 $\lambda-$ 矩阵的相抵与运算；熟练掌握可逆 $\lambda-$ 矩阵的充要条件；理解 $\lambda-$ 矩阵的带余除法；熟悉数字矩阵相似与相应特征矩阵的相抵的联系.

一. $\lambda-$ 矩阵的定义和运算

定义 1 设 K 是一个数域，形如

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

的 $m\times n$ 矩阵，其中 $a_{ij}(\lambda)\in K[\lambda]$, 称为多项式矩阵，或 $\lambda-$ 矩阵，也记为 $A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$.

多项式矩阵 $A(\lambda)$ 可表示为

$$A(\lambda)=M_l\lambda^l+M_{l-1}\lambda^{l-1}+\cdots+M_1\lambda+M_0,$$

其中 M_i 为 $m\times n$ 阶数字矩阵， $1\le i\le l$. 上式称为 l 次矩阵多项式. 因此，一个多项式矩阵可以写为系数为数字矩阵的多项式，反之，一个系数为数字矩阵的多项式也可以写为项式矩阵.

例 1

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda^2-1 & \lambda+3 \\ 1 & \lambda^3+2\lambda \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^3+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\lambda+\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 2 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $\lambda I-A=\begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{pmatrix}$.

设 $A \in K^{n\times n}$, 称多项式矩阵 $\lambda I - A$ 为矩阵 A 的 **特征矩阵**.

定义两个 $m\times n$ 阶 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 相等为 $a_{ij}(\lambda) = b_{ij}(\lambda), 1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$; 定义加法为 $A(\lambda) + B(\lambda) = (a_{ij}(\lambda) + b_{ij}(\lambda))_{m\times n}$; 定义数乘为 $cA(\lambda) = (ca_{ij}(\lambda_))_{m\times n}$, $c \in K$; 定义 $m\times n$ 阶 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 和 $n\times s$ 阶 $\lambda-$ 矩阵 $B(\lambda)$ 的乘法为 $A(\lambda)_{m\times n}B(\lambda)_{n\times s} = (\Sigma_{k=1}^{n}(a_{ik}\lambda)b_{kj}(\lambda))_{m\times s}$. 定义 n 阶 $\lambda-$ 矩阵的行列式与数字矩阵的行列式的定义相同；定义 n 阶 $\lambda-$ 矩阵的伴随矩阵与数字矩阵的行列式的定义相同.

注 1 设 $A(\lambda)$ 为 s 次矩阵多项式，但 $|A(\lambda)|$ 可能是 0 或常数.

例 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda^s & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda + 1 \end{vmatrix} = -1.$$

注 2 $A(\lambda), B(\lambda)$ 分别为 s, t 次矩阵多项式，但 $A(\lambda)B(\lambda)$ 可能为 0.

例 4

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ -\lambda & \lambda^2 \end{pmatrix} = 0.$$

二. $\lambda-$ 矩阵的初等变换

定义 2 对 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 施行的下列三种变换称为 $\lambda-$ 矩阵的行初等变换.

(1) 互换变换：将 $A(\lambda)$ 矩阵两行互换；

(2) 数乘变换：将 $A(\lambda)$ 的第 i 行乘以非零常数 c(第二类);

(3) 消去变换：将 $A(\lambda)$ 的第 i 行乘以 $f(\lambda)$ 后加到第 j 行上去 (第三类).

相应地，有列的初等变换的定义．下列三种矩阵称为初等 $\lambda-$ 矩阵：

(1) 互换矩阵 P_{ij}: 将 I_n 矩阵互换第 i, j 行得到；

(2) 数乘矩阵 $P_i(c)$: 将 I_n 的第 i 行乘以非零常数 c 得到；

(3) 消去矩阵 $P_{ij}(f(\lambda))$: 将 I_n 的第 i 行乘以 $f(\lambda)$ 后加到第 j 行得到.

$$
P_{ij} = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
& \cdots & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & \\
& & & 0 & \cdots & 1 & & & \\
& & & \cdot & & \cdot & & & \\
& & & & & & & & \\
& & & 1 & \cdots & 0 & & & \\
& & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & \cdots & \\
& & & & & & & & 1
\end{pmatrix},
$$

$$
P_i(c) = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \cdots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & & c & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \cdots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix},
$$

$$
T_{ij}(f(\lambda)) = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & f(\lambda) & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{pmatrix}.
$$

易见， $|P_{ij}| = -1, |P_i(c)| = c, |T_{ij}(f(\lambda))| = 1$.

定理 1 对 $A(\lambda)$ 施行行 (列) 的初等变换等于对其左 (右) 乘相应的初等 $\lambda-$ 矩阵.

证明 同数字矩阵的证明一样. □

定义 3 若 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 都是 $\lambda-$ 矩阵, 且 $A(\lambda)$ 经过初等变换后可变为 $B(\lambda)$, 则称 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 相抵，记作 $A(\lambda) \cong B(\lambda)$.

相抵关系是一种等价关系，即满足 (1) 反身性： $A(\lambda) \cong A(\lambda)$; (2) 对称性： $A(\lambda) \cong B(\lambda)$, 则 $B(\lambda) \cong A(\lambda)$; (3) 传递性： $A(\lambda) \cong B(\lambda)$, $B(\lambda) \cong C(\lambda)$, 则 $A(\lambda) \cong C(\lambda)$.

引理 1 设 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 相抵于对角 $\lambda-$ 矩阵 $\mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)\}$, $\lambda-$

矩阵 $B(\lambda)$ 相抵于对角 $\lambda-$ 矩阵 $\mathrm{diag}\{d_1'(\lambda), d_2'(\lambda), \cdots, d_n'(\lambda)\}$, 且 $d_1'(\lambda), d_2'(\lambda), \cdots, d_n'(\lambda)$ 是 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$ 的一个置换，则 $A(\lambda)$ 相抵于 $B(\lambda)$.

三. 可逆 $\lambda-$ 矩阵

定义 4 若 $A(\lambda)$,$B(\lambda)$ 都是 n 阶 $\lambda-$ 矩阵，且

$$A(\lambda)B(\lambda) = I_n, \quad B(\lambda)A(\lambda) = I_n,$$

则称 $A(\lambda)$ 为可逆 $\lambda-$ 矩阵， $B(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的逆 $\lambda-$ 矩阵，记为 $A^{-1}(\lambda)$.

初等 $\lambda-$ 矩阵是可逆阵. 事实上, $P_{ij}P_{ij} = I_n$; $P_i(c)P_i(c^{-1}) = I_n$; (3) $T_{ij}(f(\lambda))T_{ij}(-f(\lambda)) = I_n$.

命题 1 $\lambda-$ 矩阵的逆 $\lambda-$ 矩阵若存在，必唯一.

证明 $B(\lambda), C(\lambda)$ 均为 $A(\lambda)$ 的逆 $\lambda-$ 矩阵, 则 $B(\lambda) = B(\lambda)I_n = B(\lambda)A(\lambda)C(\lambda) = I_nC(\lambda) = C(\lambda)$. $\square$

命题 2 可逆 $\lambda-$ 矩阵的乘积也是可逆 $\lambda-$ 矩阵, 且 $(A(\lambda)B(\lambda))^{-1} = B^{-1}(\lambda)A^{-1}(\lambda)$.

证明 与数字矩阵一样证明. $\square$

定理 2 一个 $n \times n$ 阶 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充分必要条件是 $|A(\lambda)|$ 为一非零常数.

证明 充分性. 设 $d = |A(\lambda)| \neq 0$, 则矩阵 $\frac{1}{d}A^\star(\lambda)$ 也是一个 $\lambda-$ 矩阵，而 $A(\lambda)\frac{1}{d}A^\star(\lambda) = \frac{1}{d}A(\lambda)A^\star(\lambda) = I_n = \frac{1}{d}A^\star(\lambda)A(\lambda)$.

必要性. $|A(\lambda)||B(\lambda)| = |I_n| = 1$, $|A(\lambda)|, |B(\lambda)|$ 都是 λ 的多项式，所以 $|A(\lambda)|, |B(\lambda)|$ 为零次多项式，故只能是非零常数. $\square$

四. $\lambda-$ 矩阵的带余除法

引理 2 设 $M(\lambda), N(\lambda)$ 为 n 阶 $\lambda-$ 矩阵，且都不为零，又设 B 为 n 阶数字矩阵，则必存在 $\lambda-$ 矩阵 $Q(\lambda)$ 及 $S(\lambda)$ 和数字矩阵 R 及 T, 使下式成立

$$M(\lambda) = (\lambda I - B)Q(\lambda) + R; \tag{1}$$

$$N(\lambda) = S(\lambda)(\lambda I - B) + T. \tag{2}$$

证明 将 $M(\lambda)$ 写为

$$M(\lambda)=M_m\lambda^m+M_{m-1}\lambda^{m-1}+\cdots+M_1\lambda+M_0,$$

其中 $M_m\neq 0$, 对 m 用归纳法. 若 $m=0$, 取 $Q(\lambda)=0$, 已适合要求. 假设对小于 m 次的矩阵多项式 (1) 式成立，令 $Q_1(\lambda)=M_m\lambda^{m-1}$, 则

$$M(\lambda)-(\lambda I-B)Q_1(\lambda)=(BM_m+M_{m-1})\lambda^{m-1}+\cdots+M_0$$

为一个次数小于 m 的矩阵多项式，由归纳假设，得

$$M(\lambda)-(\lambda I-B)Q_1(\lambda)=(\lambda I-B)Q_2(\lambda)+R.$$

所以 $M(\lambda)=(\lambda I-B)(Q_1(\lambda)+Q_2(\lambda))+R$.

令 $Q(\lambda)=Q_1(\lambda)+Q_2(\lambda)$ 即得. 同理可证 (2) 式成立. □

五. 数字矩阵的相似与特征矩阵的相抵

定理 3 设 A,B 是数域 K 上的矩阵, 则 A 与 B 相似的充分必要条件是 $\lambda-$ 矩阵 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 相抵.

证明 必要性. 若 A 与 B 相似，则存在 K 上可逆矩阵 P, 使 $B=P^{-1}AP$.

$$P^{-1}(\lambda I-A)P=\lambda I-P^{-1}AP=\lambda I-B$$

把 P 看成是一常数 $\lambda-$ 矩阵，上式表明 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 相抵.

充分性. 若 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-B$ 相抵，则存在 $M(\lambda)$ 及 $N(\lambda)$, 使

$$M(\lambda)(\lambda I-A)N(\lambda)=\lambda I-B,$$

其中 $M(\lambda),N(\lambda)$ 为有限个初等矩阵之积，是可逆矩阵，可将上式改写为

$$M(\lambda)(\lambda I-A)=(\lambda I-B)N^{-1}(\lambda),$$

由引理可设 $M(\lambda)=(\lambda I-B)Q(\lambda)+R$, 代入上式，整理得

$$R(\lambda I-A)=(\lambda-B)[N^{-1}(\lambda)-Q(\lambda)(\lambda I-A)].$$

上式左边是一次多项式，故式中中括号部分必须是零次的，即为数字矩阵．设为 P, 即

$$R(\lambda I-A)=(\lambda I-B)P \Longrightarrow (R-P)\lambda=RA-BP.$$

再比较次数得 $R=P, RA=BP$. 只须证 P 为可逆阵即可，由设

$$P=N^{-1}(\lambda)-Q(\lambda)(\lambda I-A)$$

$$PN(\lambda)+Q(\lambda)(\lambda I-A)N(\lambda)=I$$

而 $(\lambda I-A)N(\lambda)=M^{-1}(\lambda)(\lambda I-B)$, 所以 $PN(\lambda)+Q(\lambda)M^{-1}(\lambda I-B)=I$.
由引理，可设 $N(\lambda)=S(\lambda)(\lambda I-B)+T$, 代入上式整理后，得

$$[PS(\lambda)+Q(\lambda)M^{-1}(\lambda)](\lambda I-B)+PT=I.$$

比较次数，即知方括号内矩阵必须为零，故 $PT=I$, 即 P 非零． □

注 3 由证明过程可知，若有 P,Q, 使 $\lambda I-A=P(\lambda I-B)Q$, 则 A,B 相似.

例 5 设 $f(\lambda),g(\lambda)$ 是互素的多项式，证明下列 $\lambda-$ 矩阵相抵.
$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} g(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}$.

证明 由假设，存在多项式 $u(\lambda),v(\lambda)$, 使 $f(\lambda)u(\lambda)+g(\lambda)v(\lambda)=1$, 所以

$$\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & g(\lambda) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ f(\lambda)u(\lambda) & g(\lambda) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ f(\lambda)u(\lambda)+g(\lambda)v(\lambda) & g(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 1 & g(\lambda) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} f(\lambda) & -f(\lambda)g(\lambda) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -f(\lambda)g(\lambda) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & f(\lambda)g(\lambda) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}.$$

同理可得另一结论.

作业： P_{235} 1. 2.
补充 1: 若 $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ 互素，证明 $\begin{pmatrix} g(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\lambda) \end{pmatrix}$ 相抵于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(\lambda)g(\lambda) \end{pmatrix}$.

补充 2: 若 $A(\lambda)$ 相抵于 $C(\lambda)$, $B(\lambda)$ 相抵于 $D(\lambda)$, 证明： $\begin{pmatrix} A(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{pmatrix}$ 相抵于 $\begin{pmatrix} C(\lambda) & 0 \\ 0 & D(\lambda) \end{pmatrix}$.