§ 7.7 若当标准型的进一步讨论

教学目的与要求 从线性空间的角度理解 Jordan 标准型的几何意义;理解 Jordan 标准型的若干数量对应的几何意义；了解第一分解定理和第二分解定理；掌握根子空间，循环子空间的概念；理解循环子空间是最小的不变子空间. 学会用 Jordan 标准型解决一些问题.

设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换，φ 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},(\lambda-\lambda_2)^{r_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{r_k},$$

则存在 V 的一组基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 使得

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix},$$

其中 $J_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{r_i}$ 是相应于 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$ 的若当块.

一. 第二分解定理

令 $V_1=L(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{r_1})$, 则

$$(1)\quad \begin{array}{l} \varphi(\xi_1)=\lambda_1\xi_1, \\ \varphi(\xi_2)=\lambda_1\xi_2+\xi_1, \\ \cdots \\ \varphi(\xi_{r_1})=\lambda_1\xi_{r_1}+\xi_{r_1-1}, \end{array}$$

故 $\varphi(V_1)\subseteq V_1$, 即 V_1 是 φ- 子空间. 同理，令 $V_j=L(\xi_{t_j+1},\xi_{t_j+2},\cdots,\xi_{t_j+r_j}),t_j=r_1+r_2+\cdots+r_{j-1}$, 即 V_j 对应若当块 J_j, 对应初等因子 $(\lambda-\lambda_j)^{r_j}$, 则 V_j 是 φ- 子空间，故有 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$ 是 φ- 子空间的直和分解.

由 (1) 式可得

$$\begin{aligned}&(\varphi-\lambda_1 id)\xi_1=0,\\&(\varphi-\lambda_1 id)\xi_2=\xi_1,\\&\cdots,\\&(\varphi-\lambda_1 id)\xi_{r_1}=\xi_{r_1-1},\end{aligned}$$

记 $\alpha=\xi_{r_1},\psi=\varphi-\lambda_1 id$, 则

$$\begin{aligned}&\xi_{r-1}=\psi(\alpha),\\&\xi_{r-2}=\psi^2(\alpha),\\&\cdots,\\&\xi_1=\psi^{r-1}(\alpha),\\&0=\psi^r(\alpha),\end{aligned}$$

即 $\alpha,\psi(\alpha),\psi^2(\alpha),\cdots,\psi^{r-1}(\alpha)$ 构成 V_1 的基，且 $\psi^r(\alpha)=0$.

定义 1 V 的 r 维子空间 V_0 称为线性变换 ψ 的循环子空间，若存在 $\alpha\in V_0$, 使 α, $\psi(\alpha)$, $\psi^2(\alpha),\cdots,\psi^{r-1}(\alpha)$ 为 V_0 的一组基且 $\psi^r(\alpha)=0$, 此时，称 $\psi^{r-1}(\alpha)$, $\psi^{r-2}(\alpha),\cdots,\psi(\alpha),\alpha$ 为 V_0 的循环基.

注 1 循环子空间是 ψ- 子空间.

定理 1 设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维空间 V 的线性变换，设 φ 的初等因子为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},(\lambda-\lambda_2)^{r_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{r_k},$$

则 $V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$, 这里 V_i 是维数为 r_i 的关于 $(\varphi-\lambda_i id)$ 的循环子空间.

二. 第一分解定理

将定理 1 中属于 λ_1 的循环子空间加在一起构成 V 的一个子空间，

$$R(\lambda_1)=V_1\oplus\cdots\oplus V_t,$$

其中 V_i 对应 J_i, 对应 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i},1\le i\le t$, 则 $V=R(\lambda_1)\oplus R(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus R(\lambda_s)$, 这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 φ 的全部不同的特征值， $\dim R(\lambda_i)=\lambda_i$ 在 $f_\varphi(\lambda)$ 中的重数 (λ_i 的代数重数).

引理 1 $R(\lambda_1)=\{v\in V|(\varphi-\lambda_1 id)^{l_1}(v)=0\},l_1=\max\{r_1,r_2,\cdots,r_t\}$.

证明 对任意的 $v\in V_i$, $1\le i\le t,(\varphi-\lambda_1 id)^{r_i}(v)=0$, 所以 $R(\lambda_1)\subseteq\{v\in V|(\varphi-\lambda_1 id)^{l_1}(v)=0\}$.

反之，因 $V_j, 1 \le j \le k$ 是 φ- 子空间，因而也是 $(\varphi - \lambda_1 id)^{l_1}$- 子空间. 设 $v \in V, (\varphi - \lambda_1 id)^{l_1}(v) = 0$, 在 $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k, v_i \in V_i$ 中, 假设 $0 \ne v_j \in V_j, t < j \le k$, 设 V_j 的基为 $\xi_{h+1}, \xi_{h+2}, \cdots, \xi_{h+r_j}, h = r_1 + \cdots + r_{j-1}$, 则

$$\varphi(\xi_{h+1}, \xi_{h+2}, \cdots, \xi_{h+r_j}) = (\xi_{h+1}, \xi_{h+2}, \cdots, \xi_{h+r_j}) \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{pmatrix},$$

所以

$$(\varphi - \lambda_1 id)^{l_1}(\xi_{h+1}, \cdots, \xi_{h+r_j}) = (\xi_{h+1}, \cdots, \xi_{h+r_j}) \begin{pmatrix} \lambda_j - \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j - \lambda_1 \end{pmatrix}^{l_1},$$

因为 $\lambda_j \ne \lambda_1$, 所以 $\begin{pmatrix} \lambda_j - \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j - \lambda_1 \end{pmatrix}^{l_1}$ 为可逆矩阵，故 $(\varphi - \lambda_1 id)^{l_1}$ 在

V_j 的限制映射为可逆映射，故 $(\varphi - \lambda_1 id)^{l_1}(v_j) \ne 0$. 因为 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$ 是 $(\varphi - \lambda_1 id)^{l_1}$- 不变子空间的直和分解，所以 $(\varphi - \lambda_1 id)^{l_1} v \ne 0$, 矛盾.

这就证明了 v 在不属于 λ_1 的每个循环子空间的分量为零，故 $v \in R(\lambda_1)$. $\square$

注 2 从证明过程中可以看出引理中 $R(\lambda_1) = \{v \in V | (\varphi - \lambda_1 id)^n(v) = 0\}$.

定义 2 设 λ_0 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维空间上线性变换 φ 的特征根，则 $R(\lambda_0) = \{v \in V | (\varphi - \lambda_1 id)^n(v) = 0\}$ 构成 V 的子空间，称为属于特征根 λ_0 的根子空间.

注 3 根子空间是 φ- 子空间.

注 4 $R(\lambda_0) = \ker(\varphi - \lambda_1 id)^l$.

注 5 $R(\lambda_0)$ 可表为若干个循环子空间的直和, 每个循环子空间对应一个若当块.

上面引理 1 对其余 $R(\lambda_i)$ 也成立，故有：

定理 2 设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换, φ 的不同特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 则

$$V = R(\lambda_1) \oplus R(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus R(\lambda_s)$$

其中 $R(\lambda_i)$ 是 λ_i 的根子空间, $\dim R(\lambda_i) = \lambda_i$ 的代数重数, $R(\lambda_i)$ 可表为若干个循环子空间的直和.

三. 特征子空间

记 λ_1 为 φ 的特征根, $V_{\lambda_1} = \{v \in V | \varphi(v) = \lambda_1 v\}$ 是 λ_1 的特征子空间, 显然有 $V_{\lambda_1} \subseteq R(\lambda_1) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$, 那么 V_{λ_1} 在哪里呢?

因为 V_1 是 φ- 子空间, 记 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{r_1}$ 是 V_1 的循环基:

$$\varphi|_{V_1}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{r_1}) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{r_1}) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}_{r_1}$$

易知 $\xi_1 \in V_{\lambda_1}$, 又因为 $r(\lambda_1 I - J_{\lambda_1}) = r_1 - 1$, 所以 V_1 中只有一个线性无关的特征向量. 同理, $V_j, 1 \le j \le t$ 中只有一个线性无关特征向量.

进一步, $\xi_1, \xi_{r_1+1}, \xi_{r_1+r_2+1}, \cdots, \xi_{r_1+\cdots+r_{t-1}+1}$, 这 t 个向量来自 $R(\lambda_1)$ 的不同直和项, 它们是线性无关的属于 λ_1 的特征向量. 又因为

$$\lambda_1 I - J = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} - J_1 & & & \\ & \lambda_1 I_{r_2} - J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_1 I_{r_k} - J_k \end{pmatrix},$$

因为

$$r(\lambda_1 I_{r_j} - J_j) = \begin{cases} r_j - 1; 1 \le j \le t \\ r_j; t < j < k \end{cases}$$

故 $r(\lambda_1 I - J) = r_1 + r_2 + \cdots + r_k - t = n - t$, 所以 $\dim V_{\lambda_1} = t$. 这样 $\xi_1, \xi_{r_1+1}, \xi_{r_1+r_2+1}$, $\cdots$, $\xi_{r_1+\cdots+r_{t-1}+1}$ 构成 V_{λ_1} 的基.

引理 2 φ 的若干标准形中属于特征值 λ_i 的若当块的个数等于 λ_i 的几何重数!

注 6 φ 的所有特征值的几何重数等于代数重数;

$\Leftrightarrow$ φ 的若当标准形中属于 λ_i 的若当块数等于属于 λ_i 的若当块的阶数之和;

$\Leftrightarrow J$ 是对角阵;

$\Leftrightarrow \varphi$ 可对角化.

四. V_i 的不可分解性

取 V_1 的基 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$,

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r) = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

引理 3 (1) V_1 中包含 ξ_r 的 φ- 子空间只有 V_1 本身.

(2) V_1 的任意 φ- 子空间均包含 ξ_1.

(3) V_1 不能分解成为两个非平凡的 φ- 子空间的直和.

证明 $\varphi(\xi_1) = \lambda_1\xi_1, \varphi(\xi_i) = \lambda_1\xi_i + \xi_{i-1}, 2 \le i \le r$.

(1) 设 W 是 V_1 的包含 ξ_r 的 φ- 子空间, $\varphi(\xi_r) = \lambda_1\xi_r + \xi_{r-1}$, 所以 $\xi_{r-1} \in W$, 进一步有 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r \in W$, 所以 $W = V_1$.

(2) 设 W 是 V_1 的 φ- 子空间, 任意 $0 \ne \alpha \in W, \alpha = a_1\xi_1 + \cdots + a_r\xi_r$, $a_r, a_{r-1}, \cdots, a_1$ 中, 不妨设第一个不为 0 的是 a_i, 即 $\alpha = a_1\xi_1 + \cdots + a_i\xi_i$, 由 $\varphi(\alpha) - \lambda_1\alpha \in W$, 可得 $\alpha_1 = a_2\xi_1 + \cdots + a_i\xi_{i-1} \in W$, 由 $\varphi(\alpha_1) - \lambda_1\alpha_1 \in W$, 可得 $\alpha_2 = a_3\xi_1 + \cdots + a_i\xi_{i-2} \in W$, 继续做下去, 可得 $a_i\xi_1 \in W$, 因为 $a_i \ne 0$, 所以 $\xi_1 \in W$.

(3) 由 (2) 即得.

定理 3 设 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k, V_i$ 是 $(\varphi - \lambda_i id)$ 的循环子空间, 则 V_i 不可分解为两个非平凡的 φ- 子空间的直和.

五. 空间分解为根子空间的直和的直接证明

定理 4 设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维空间 V 的线性变换,

$$m_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s},$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是 φ 的全部互异特征值. 设 $R(\lambda_i) = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i id)^{l_i}$, 记

$$g_i(\lambda) = m_\varphi(\lambda)/(\lambda - \lambda)^{l_i} = \prod_{j \ne i}(\lambda - \lambda_j)^{l_j},$$

则　(1)　$\text{Im}g_i(\varphi) = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i id)^{l_i} (= R(\lambda_i))$;

(2)　$V = R(\lambda_1) \oplus R(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus R(\lambda_s)$.

证明 因为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 互不相同，所以 $(g_1(\lambda), g_2(\lambda), \cdots, g_s(\lambda)) = 1$, 故存在 $u_1(\lambda), u_2(\lambda), \cdots, u_s(\lambda)$, 使得

$$g_1(\lambda)u_1(\lambda) + g_2(\lambda)u_2(\lambda) + \cdots + g_s(\lambda)u_s(\lambda) = 1,$$

故

$$I = g_1(\varphi)u_1(\varphi) + g_2(\varphi)u_2(\varphi) + \cdots + g_s(\varphi)u_s(\varphi),$$

这样，对任意 $v \in V$, 就有

$$v = g_1(\varphi)u_1(\varphi)(v) + g_2(\varphi)u_2(\varphi)(v) + \cdots + g_s(\varphi)u_s(\varphi)(v) \in \text{Im}g_1(\varphi) + \cdots + \text{Im}g_s(\varphi).$$

所以 $V = \text{Im}g_1(\varphi) + \cdots + \text{Im}g_s(\varphi)$.

下面证明 $\text{Im}g_i(\varphi) = \text{Ker}(\varphi - \lambda_i I)^{l_i}, 1 \leq i \leq s$,

因为 $m_\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{l_i} g_i(\lambda)$, 所以 $\text{Im}g_i(\varphi) \subseteq \text{Ker}(\varphi - \lambda_i I)^{l_i}$. 反之，设 $v \in \text{Ker}(\varphi - \lambda_i I)^{l_i}$, 因为 $(\lambda - \lambda_i)^{l_i} | g_j(\lambda), i \neq j$, 所以 $g_j(\varphi)(v) = 0$, 故

$$v = g_1(\varphi)u_1(\varphi)(v) + g_2(\varphi)u_2(\varphi)(v) + \cdots + g_s(\varphi)u_s(\varphi)(v) = g_i(\varphi)u_i(\varphi)(v),$$

所以 $\text{Ker}(\varphi - \lambda_i I)^{l_i} \subseteq \text{Im}g_i(\varphi)$.

综上，知 $V = R(\lambda_1) + R(\lambda_2) + \cdots + R(\lambda_s)$.

为证明这个和是直和，设 $0 = v_1 + v_2 + \cdots + v_s, v_i \in R(\lambda_i)$, 从上面证明过程知 $v_i = g_i(\varphi)u_i(\varphi)(v_i)$, 所以

$$0 = g_i(\varphi)u_i(\varphi)(v_1 + v_2 + \cdots + v_s) = g_i(\varphi)u_i(\varphi)(v_i) = v_i,$$

这样 $v_i = 0, 1 \leq i \leq s$, 即零向量表示法唯一，故

$$V = R(\lambda_1) \oplus R(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus R(\lambda_s). \quad \square$$

六. 第二分解定理的直接证明

引理 4 设 ψ 是数域 F 上有限维线性空间 W 的幂零变换. 设 $g(x) \in F[x]$ 且 $x \nmid g(x)$, 则 $g(\psi)$ 可逆且逆也是 ψ 的多项式.

证明 设 $\psi^m=0$. 因为 $x\nmid g(x)$, 所以 $(x^m,g(x))=1$, 存在 $u(x),v(x)\in F[x]$, 使得 $u(x)x^m+v(x)g(x)=1$, 故 $u(\psi)\psi^m+v(\psi)g(\psi)=id$. 这样 $v(\psi)g(\psi)=id$, $g^{-1}(\psi)=v(\psi)$. $\Box$

设 ψ 是数域 F 上有限维线性空间 W 的幂零变换. 设 $0\neq\alpha\in W$, 记

$$F[\psi]\alpha:=\{f(\psi)(\alpha)\mid f(x)\in F[x]\},$$

易知 $F[\psi]\alpha$ 是 W 的 ψ- 子空间. 如果存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in W$, 使得 $W=F[\psi]\alpha_1+F[\psi]\alpha_2+\cdots+F[\psi]\alpha_s$, 则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 W 的一组 $\psi-$ 生成元.

引理 5 设 ψ 是数域 F 上线性空间 W 的幂零变换，则存在 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\in W$, 使得

$$W=F[\psi]\beta_1\oplus F[\psi]\beta_2\oplus\cdots\oplus F[\psi]\beta_s.$$

证明 首先， W 的一组 $\psi-$ 生成元总存在，取 W 的一组基即是. 所以可设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 W 的一组 $\psi-$ 生成元，使得 s 是最小的. 这样

$$W=F[\psi]\alpha_1+F[\psi]\alpha_2+\cdots+F[\psi]\alpha_s.$$

对于任意的 i,$1\leq i\leq s$, 均有 $\alpha_i\notin\sum_{j\neq i}F[\psi]\alpha_j$. 由于 ψ 是幂零的，故存在 r_i, 使得 $\psi^{r_i}(\alpha_i)\in\sum_{j\neq i}F[\psi]\alpha_j$. 不妨设 r_i 是最小的数且 $r_1\leq r_2\leq\cdots\leq r_s$, 则

$$\psi^{r_1}(\alpha_1)=f_2(\psi)(\alpha_2)+f_3(\psi)(\alpha_3)+\cdots+f_s(\psi)(\alpha_s).$$

记 $f_i(x)=g_i(x)x^{t_i}$, 这里 $x\nmid g_i(x)$, 我们断言必有 $t_i\geq r_i$. 事实上， $f_i(\psi)(\alpha_i)\in\sum_{j\neq i}F[\psi]\alpha_j$, 即 $g_i(\psi)\psi^{t_i}(\alpha_i)\in\sum_{j\neq i}F[\psi]\alpha_j$. 因为 $x\nmid g_i(x)$ 且 ψ 幂零，根据引理知 $g_i(\psi)$ 可逆且逆也是 ψ 的多项式. 所以 $\psi^{t_i}(\alpha_i)\in\sum_{j\neq i}F[\psi]\alpha_j$. 由 r_i 的最小性知 $t_i\geq r_i$.

这样有

$$\psi^{r_1}(\alpha_1)=\psi^{r_1}\sum_{i=2}^{s}g_i(\psi)\psi^{t_i-r_1}(\alpha_i).$$

令

$$\beta_1=\alpha_1-\sum_{i=2}^{s}g_i(\psi)\psi^{t_i-r_1}(\alpha_i),$$

则 $\psi^{r_1}(\beta_1)=0$ 且 $W=F[\psi]\beta_1+U$, 这里 $U=F[\psi]\alpha_2+\cdots+F[\psi]\alpha_s$.

若 $\gamma\in F[\psi]\beta_1\cap U$, 则 $\gamma=h(\psi)(\beta_1)\in U$, 进而有 $h(\psi)(\alpha_1)\in U$. 若 $h(x)\neq 0$, 记 $h(x)=p(x)x^l$, 其中 $x\nmid p(x)$, 根据引理，得 $\psi^l(\alpha_1)\in U$, 所以 $l\geq r_1$. 故 $\gamma=h(\psi)(\beta_1)=p(\psi)\psi^l(\beta_1)=0$. 所以

$$W=F[\psi]\beta_1\oplus U,$$

其中 $U=F[\psi]\alpha_2+\cdots+F[\psi]\alpha_s$ 是 W 的 ψ 子空间.

显然 ψ 限制在 U 上还是幂零变换， $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s$ 是 U 的 $\psi-$ 生成元且 s 是最小的. 由归纳法，即证得结论. □

引理 6 设 ψ 是数域 F 上有限维线性空间 W 的幂零变换， $0\neq\beta\in W$, 则 $F[\psi]\beta$ 是 ψ 循环子空间.

证明 不妨设 $\psi^m=0$, 则存在 l, 使得 $\psi^l(\beta)=0$ 且 $\psi^{l-1}(\beta)\neq 0$. 这样易知 $\beta,\psi(\beta),\psi^2(\beta),\cdots,\psi^{l-1}(\beta)$ 线性无关.

另一方面，对于任意 $f(\psi)\in F[\psi]$, 根据带余除法 $f(x)=x^lq(x)+r(x)$, 其中 $\deg r(x)<l$. 所以

$$f(\psi)(\beta)=q(\psi)\psi^l(\beta)+r(\psi)(\beta)=r(\psi)(\beta)\in L(\beta,\psi(\beta),\psi^2(\beta),\cdots,\psi^{l-1}(\beta)),$$

这就证明了 $\psi^{l-1}(\beta),\cdots,\psi^2(\beta),\psi(\beta),\beta$ 是 W 的一个循环基, 而 W 是循环子空间. □

定理 5 设 φ 是数域 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间上的线性变换， $R(\lambda_1)$ 是属于特征值 λ_1 的根子空间，即 $R(\lambda_1)=\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 id)^n$. 则 $R(\lambda_1)$ 可分解为若干 $(\varphi-\lambda_1 id)$ 的循环子空间的直和.

七. Jordan-Chevalley 分解

定理 6 设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间 V 的线性变换, 则存在唯一一对线性变换 σ 和 τ, 使得:

(1) $\varphi=\sigma+\tau$, 其中 σ 是可对角化的线性变换， τ 是幂零线性变换, 且 $\sigma\tau=\tau\sigma$;

(2) 存在 $p(\lambda),q(\lambda)\in\mathbb{C}[\lambda]$, 使得 $\sigma=p(\varphi)$, $\tau=q(\varphi)$.

证明 设 φ 的极小多项式为

$$m_\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s},$$

则有

$$V = R(\lambda_1) \oplus R(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus R(\lambda_s),$$

其中 $R(\lambda_i) = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i id)^{l_i}$, $1 \le i \le s$.

由于 $(\lambda-\lambda_1)^{l_1}, (\lambda-\lambda_2)^{l_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{l_s}$ 两两互素，根据中国剩余定理，存在多项式 $p(\lambda)$, 使得对任意的 i, $1 \le i \le s$, 存在 $g_i(\lambda)$, 使得

$$p(\lambda) - \lambda_i = g_i(\lambda)(\lambda - \lambda_i)^{l_i}.$$

记 $q(\lambda) = \lambda - p(\lambda)$. 令 $\sigma = p(\varphi)$, $\tau = q(\varphi)$, 则 $\varphi = \sigma + \tau$.

对于任意的 $\alpha_i \in R(\lambda_i)$, 即 $\alpha_i \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i id)^{l_i}$, 有

$$(p(\varphi) - \lambda_i id)(\alpha_i) = g_i(\varphi)(\varphi - \lambda_i id)^{l_i}(\alpha_1) = 0,$$

故 $p(\varphi)(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i$, $1 \le i \le s$. 这样 $p(\varphi)$ 可对角化.

对任意 $\alpha_i \in R(\lambda_i)$, 因为 $p(\varphi)(\alpha_i) = \lambda_i \alpha_i$, 所以 $\tau^{l_i}(\alpha_i) = (\varphi - p(\varphi))^{l_i}(\alpha_i) = (\varphi - \lambda_i id)^{l_i}(\alpha_i) = 0$. 取 $l = \max\{l_1, l_2, \cdots, l_s\}$, 则有 $\tau^l = 0$. 因此 τ 是幂零的线性变换.

下面证明唯一性. 设另有满足条件的分解 $\varphi = \sigma_1 + \tau_1$, 由 $\sigma_1\tau_1 = \tau_1\sigma_1$ 得到 $\sigma_1(\varphi - \sigma_1) = (\varphi - \sigma_1)\sigma_1$, 所以 σ_1 和 φ 可交换，同理 φ 和 τ_1 可交换，因为 σ 和 τ 都是 φ 的多项式，所以显然 σ_1 和 σ 可交换， τ_1 和 τ 可交换，故 σ 和 σ_1 可同时对角化，即 $\sigma - \sigma_1$ 可对角化. 另一方面，从 τ 及 τ_1 的可交换和幂零性容易推出 $\tau_1 - \tau$ 也是幂零的线性变换. 事实上，若 $\tau^s = 0, \tau_1^t = 0$, 则 $(\tau_1 - \tau)^{s+t} = 0$. 但 $\sigma - \sigma_1 = \tau_1 - \tau$, 故 $\sigma_1 = \sigma$, $\tau_1 = \tau$. □

定理 6' 设 A 是复方阵. 则 A 可分解为 $A = B + C$, 其中 C 是幂零阵， B 是相似于对角阵的方阵， B 和 C 都是 A 的多项式，且 $CB = BC$, 并且这种分解是唯一的.

八. 若当小块的决定

设 λ_1 是 φ 的特征值，$R(\lambda_1) = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 id)^l \neq \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 id)^{l-1}$, 记属于 λ_1 的一阶 Jordan 小块个数为 c_1, 属于 λ_1 的二阶 Jordan 小块的个数为 $c_2, \cdots$, 属于 λ_1 的 l 阶 Jordan 小块个数为 c_l. $R(\lambda_1) = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_t$, 而 $\mathrm{dim} R(\lambda_1) = \lambda_1$的代数重数$m_1$.

$$R(\lambda_1) \text{ 对应 } \begin{pmatrix} J(\lambda_1, r_1) & & & \\ & J(\lambda_1, r_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J(\lambda_1, r_t) \end{pmatrix}_{m_1}.$$

记 $b_1 = \dim \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_1 id)$, $b_2 = \dim \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_1 id)^2$, $\cdots$, $b_l = \dim \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_1 I)^l$, 则有

$$\begin{aligned} & b_1 = c_1 + c_2 + \cdots + c_l, \\ & b_2 = c_1 + 2(c_2 + \cdots + c_l), \\ & b_3 = c_1 + 2c_2 + 3(c_3 + \cdots + c_l), \\ & \cdots \\ & b_{l-1} = c_1 + 2c_2 + \cdots + (l-2)c_{l-2} + (l-1)(c_{l-1} + c_l), \\ & b_l = c_1 + 2c_2 + \cdots + (l-1)c_{l-1} + lc_l. \end{aligned}$$

解非奇次线性方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & l-1 & l-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & l-1 & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \cdots \\ c_{l-1} \\ c_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_{l-1} \\ b_l \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & b_2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & l-1 & l-1 & b_{l-1} \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & l-1 & l & b_l \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & b_3 - b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & b_{l-1} - b_{l-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_l - b_{l-1} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2b_2 - b_1 - b_3 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 2b_3 - b_2 - b_4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 2b_{l-1} - b_{l-2} - b_l \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & b_l - b_{l-1} \end{pmatrix},$$

得到

$$\begin{cases} c_1 = 2b_1 - b_2 \\ c_2 = 2b_2 - b_1 - b_3 \\ c_3 = 2b_3 - b_2 - b_4 \\ \cdots \\ c_{l-1} = 2b_{l-1} - b_{l-2} - b_l \\ c_l = b_l - b_{l-1} \end{cases}$$

定理 7 设 λ_1 是 φ 的特征值， $R(\lambda_1) = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 id)^l \neq \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 id)^{l-1}$, 记属于 λ_1 的 j 阶若当小块的个数为 $c_j, 1 \leq j \leq l$. 则

$$\begin{cases} c_1 = 2\dim\,\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 id) - \dim\,\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 id)^2 \\ c_j = 2\dim\,\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 id)^j - \dim\,\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 id)^{j-1} - \dim\,\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 id)^{j+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2 \leq j \leq l-1 \\ c_l = \dim\,\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 id)^l \dim\,\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 id)^{l-1} \end{cases}$$

即 $\begin{cases} c_1 = n + r(A - \lambda_1 I)^2 - 2r(A - \lambda_1 I) \\ c_j = r(A - \lambda_1 I)^{j-1} + r(A - \lambda_1 I)^{j+1} - 2r(A - \lambda_1 I)^j \qquad 2 \leq j \leq l-1 \\ c_l = r(A - \lambda_1 I)^{l-1} - r(A - \lambda_1 I)^l \end{cases}$

推论 1 $\dim\,\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 I)^j = \dim\,\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_1 I)^{j+1}$;

$\Leftrightarrow c_{j+1} + c_{j+2} + \cdots + c_l = 0$;

$\Leftrightarrow$ 属于 λ_1 的 $j+1$ 阶， $j+2$ 阶， $\cdots$, l 阶 Jordan 小块个数为 0.

推论 2 对 φ 的任意特征值 λ_i, 均有 $\dim\,\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i id) = \dim\,\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i id)^2$;

$\Leftrightarrow \varphi$ 的属于 λ_i 的 Jordan 小块只有一阶;

$\Leftrightarrow \varphi$ 可对角化.

推论 3 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, r(A - \lambda_i I) = r(A - \lambda_i I)^2$, 任意特征值 $\lambda_i \Longleftrightarrow A$ 可对角化.

七. 应用举例

例 1 求证：复数域上的方阵 A 必可分解为两个对称阵的乘积.

证明 设 J 是 A 的 Jordan 标准形, 所以存在一个非异矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = J$,

即 $A=PJP^{-1}$. 对于 J 的每个若当小块 J_i, 有

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & & & 1 & \lambda_i \\ & & 1 & \lambda_i & \\ & & \cdots & & \\ 1 & \lambda_i & & & \\ \lambda_i & & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix},$$

即 J_i 可分解为两个对称阵之积. 所以 J 也可以分解为两个对称矩阵之积，记为 S_1, S_2, 则

$$A=PJP^{-1}=PS_1S_2P^{-1}=(PS_1P')(P^{-1})'S_2P^{-1},$$

显然 PS_1P' 和 $(P^{-1})'S_2P^{-1}$ 均为对称矩阵，证毕.

作业 1. $V=R(\lambda_1)\oplus R(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus R(\lambda_s)$, W 是 V 的 φ- 子空间，则 $W=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_s, W_i=W\cap R(\lambda_i)$.

作业 2. $A,B\in\mathbb{C}^{3\times3}$, 则 A 相似于 B 的充要条件是 $m_A(\lambda)=m_B(\lambda)$ 且 $f_A(\lambda)=f_B(\lambda)$. 当 A,B 为 4 阶矩阵时，情况如何？

作业 3. $f_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda+5)^4, m_A(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda+5)^2$, 写出 A 的 Jordan 标准形.