§7.6　Jordan 标准型

教学目的与要求 掌握矩 Jordan 标准型的定义；熟练掌握 Jordan 标准型与初等因子的关系；理解 Jordan 标准型的含义；能利用 Jordan 标准型证明一些命题.

本节在 $\mathbb{C}$ 上讨论.

引理 1 设 J 是分块对角阵

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix},$$

其中每个 J_i 都是型如 §7.5 例 2 中的矩阵，J_i 的初等因子组为 $(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$, 则 J 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},(\lambda-\lambda_2)^{r_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{r_k}.$$

证明 $\lambda I-J$ 是一个分块对角 λ- 阵. 由于对分块对角阵中某一块施行初等变换时其余各块保持不变，因此 $\lambda I-J$ 相抵于下列分块对角阵

$$H=\begin{pmatrix} H_1 & & & \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & H_k \end{pmatrix},$$

其中 $H_i=\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,(\lambda-\lambda_i)^{r_i}\}$, 由上节定理知 J 的初等因子组是

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},(\lambda-\lambda_2)^{r_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{r_k}.\quad\square$$

定理 1 设 A 是 $\mathbb{C}$ 上的矩阵且 A 的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},(\lambda-\lambda_2)^{r_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{r_k},$$

则 A 相似于分块对角阵：

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix},$$

其中 J_i 为 r_i 阶矩阵，且

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

我们称 J 为 A 的 Jordan 标准型.

证明 因为 A 与 J 有相同的初等因子组. □

例 1 设 A 是 7 阶矩阵，其初等因子组为 $\lambda-1, (\lambda-1)^3, (\lambda+1)^2, \lambda-2$, 求其 Jordan 标准型.

解 $J = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & -1 & 1 & \\ & & & & 0 & -1 & \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix}.$

注 1 若不计 Jordan 块的排列次序，矩阵的 Jordan 标准型是唯一确定的.

注 2 $f_A(\lambda)$ 为 A 的所有初等因子的乘积.

注 3 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是 A 的所有不同的特征值，则

$$m_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{a_1}(\lambda-\lambda_2)^{a_2}\cdots(\lambda-\lambda_2)^{a_2},$$

其中 a_i 为属于 λ_i 的阶数最大 Jordan 块的阶数.

$$f_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{b_1}(\lambda-\lambda_2)^{b_2}\cdots(\lambda-\lambda_2)^{b_2},$$

其中 b_i 为属于 λ_i 的 Jordan 块的阶数之和，它是 λ_i 的代数重数.

定理' 设 φ 是 $\mathbb{C}$ 上线性空间 V 上的线性变换，则必存在 V 的一组基，在这组基下 φ 的表示矩阵为 Jordan 阵.

推论 1 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则下面叙述是等价的.

(1) A 相似于对角阵;

(2) A 的初等因子全是一次的;

(2) $m_A(\lambda)$ 无重根.

推论 2 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则下列命题等价

(1) A 相似于 kI;

(2) $m_A(\lambda)$ 为一次多项式;

(3) A 的初等因子全是一次且相同.

例 2 设 $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$, $f_A(\lambda) \in \mathbb{Q}[x]$ 为不可约多项式. 求证: A 的有理标准型只有一块 Frobenius 块, 而在 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上, A 的 Jordan 标准型是对角阵.

证明 在 $\mathbb{Q}$, $f_A(\lambda)$ 上不可约, 而 $f_A(\lambda)$ 是不变因子之积, 故 A 只有一个非常数不变因子 $f_A(\lambda)$. 另一方面, $f_A(\lambda)$ 不可约, 因而在 $\mathbb{C}$ 上无重根, 所以 $m_A(\lambda)$ 无重根, 所以 A 可对角化. □

例 3 设 n 阶矩阵 A 适合 $A^2 = 0$, A 的秩等于 $r > 0$, 求出的初等因子组.

解 法一. 因为 A适合$A^2 = 0$, 所以 λ^2 是 A 的零化多项式, 其极小多项式为其因式. 又 $r(A) = r$, 所以极小多项式不可能为 λ, 否则 A 相似于 0 矩阵, 与 $r(A) = r$ 矛盾. A 的初等因子组为 $\lambda, \cdots, \lambda(n-2r\text{个}), \lambda^2, \cdots, \lambda^2(r\text{个})$.

解法二. A 相似于 $J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}$, 由 $A^2 = 0$ 可得 $J^2 = 0$. 进一步 $J_i^2 = 0$, $1 \le i \le k$. 所以 $J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 或 0. 又 $r(A) = r$, 所以有 r 个 J_i 形如 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 其余 $n-2r$ 个 J_i 为 0. 故 A 的初等因子组为 $\lambda, \cdots, \lambda(n-2r\text{个}), \lambda^2, \cdots, \lambda^2(r\text{个})$.

例 4 设 $\mathbb{C}$ 上四维线性空间上的线性变换 φ 在一组基 e_1, e_2, e_3, e_4 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

求 V 的一组基, 使 φ 在这组基下的矩阵为 Jordan 标准型, 并求出从原来的基到新基的过渡矩阵.

解

$$
\begin{aligned}
\lambda I - A &= \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 14 & 5 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \lambda-3 & 0 & 0 \\ -\lambda-1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & \lambda-2 & -1 \\ -5 & 14 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda+3) & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 5\lambda-1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -(\lambda+3) & -1 \\ 0 & 1 & 5\lambda-1 & \lambda \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5\lambda-1 & \lambda \\ 0 & \lambda-2 & -(\lambda+3) & -1 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5\lambda-1 & \lambda \\ 0 & 0 & -5(\lambda-1)^2 & -(\lambda-1)^2 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \end{pmatrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

所以 A 的初等因子为 $(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2$, A 的 Jordan 标准型为

$$
J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{$*$}
$$

设矩阵 P 是从 e_1, e_2, e_3, e_4 到新基的过渡矩阵，则 $P^{-1}AP = J$, 即 $AP = PJ$. 设 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 其中 α_i 是 4 维列向量，代入 (*) 得

$$
(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3, A\alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

化成方程组为

$$
\begin{array}{ll}
A\alpha_1 = \alpha_1 & (I-A)\alpha_1 = 0 \\
A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2 & (I-A)\alpha_2 = -\alpha_1 \\
A\alpha_3 = \alpha_3 & (I-A)\alpha_3 = 0 \\
A\alpha_4 = \alpha_3 + \alpha_4 & (I-A)\alpha_4 = -\alpha_3
\end{array}
$$

$$
I - A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & -1 & -1 \\ 14 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$\begin{pmatrix} I-A & \vdots & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & \vdots & b_1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & \vdots & b_2 \\ -6 & -1 & -1 & -1 & \vdots & b_3 \\ 14 & 5 & 1 & 1 & \vdots & b_4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & \vdots & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_2+2b_1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & \vdots & b_3-3b_1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & \vdots & b_4+7b_1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \vdots & -\frac{b_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_2-2b_1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \vdots & \frac{b_3}{2}-\frac{3}{2}b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_4+b_3+4b_1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \vdots & \frac{b_1}{4}-\frac{b_3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \vdots & \frac{b_3}{2}-\frac{3}{2}b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b_4+b_3+4b_1 \end{pmatrix}$$

$b=0,\ (I-A)\alpha_1=0.\ \ x_1=-\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4, x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_4$. 取 $x_3=-4, x_4=0$, 得

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$b=-\alpha_1,\ (I-A)\alpha_2=-\alpha_1.\ \ x_1=\frac{1}{4}b_1-\frac{1}{4}b_3-\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot 4-\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4=-\frac{5}{4}-\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4, x_2=\frac{1}{2}b_3-\frac{3}{2}b_1+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4$. 取 $x_3=-6, x_4=1$, 得

$$\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$b=0,\ (I-A)\alpha_3=0$. 取 $x_3=1, x_4=-1$, 得

$$\alpha_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T$$

$b=-\alpha_3,\ (I-A)\alpha_4=-\alpha_3.\ \ x_1=\frac{1\cdot 0}{4}-\frac{-1}{4}-\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}x_3-\frac{1}{4}x_4, x_2=-\frac{1}{2}b_3-\frac{3\cdot 0}{2}b_1+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4$. 取 $x_3=0, x_4=1$, 得

$$\alpha_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

所以 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 因此, 新基为 $e_1 - 2e_2 - 4e_3, e_2 - 6e_3 + e_4, e_3 - e_4, e_4$.

□

练习： P_{254} 1. (1), 2. (5), 3, 8,

选做： P_{254} 4

思考： P_{266} 2, 3, 4,