§7.5 初等因子

教学目的与要求：掌握矩阵的初等因子组的定义；熟练掌握初等因子组与不变因子组的关系；熟练掌握初等因子组是矩阵相似的全系不变量；掌握初等因子组的计算.

一. 初等因子组

设 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_k(\lambda)$ 是数域 K 上矩阵 A 的非常数不变因子，在 K 上把 $d_i(\lambda)$ 分解为不可约因子之积

$$\begin{gathered}d_1(\lambda)=p_1^{e_{11}}(\lambda)p_2^{e_{12}}(\lambda)\cdots p_t^{e_{1t}}(\lambda)\\ d_2(\lambda)=p_1^{e_{21}}(\lambda)p_2^{e_{22}}(\lambda)\cdots p_t^{e_{2t}}(\lambda)\\ \cdots\\ d_k(\lambda)=p_1^{e_{k1}}(\lambda)p_2^{e_{k2}}(\lambda)\cdots p_t^{e_{kt}}(\lambda)\end{gathered}$$

其中 $p_i(\lambda)$ 是首一的两两互素的不可约多项式，e_{ij} 是非负整数, 且 $0\le e_{1j}\le e_{2j}\le\cdots\le e_{kj}$, $1\le j\le t$.

定义 1 若上面分解式中的 $e_{ij}>0$, 则称 $p_j^{e_{ij}}(\lambda)$ 为 A 的一个初等因子， A 的全体初等因子称为 A 的初等因子组.

例 1 设 9 阶有理数域上的矩阵 A 的不变因子组为

$$1,\cdots,1,(\lambda_1-1)(\lambda^2+1),(\lambda-1)^2(\lambda^2+1)(\lambda^2-2),$$

试分别从有理数域，实数域和复数域上求 A 的初等因子组.

解 在有理数域上的初等因子组为 $\lambda_1-1,\lambda^2+1,(\lambda-1)^2,\lambda^2+1,\lambda^2-2$;
在实数域上初等因子组为 $\lambda_1-1,(\lambda-1)^2,\lambda+\sqrt{2},\lambda-\sqrt{2},\lambda^2+1,\lambda^2+1$;
在复数域上初等因子组为 $\lambda_1-1,(\lambda-1)^2,\lambda+\sqrt{2},\lambda-\sqrt{2},\lambda+i,\lambda-i,\lambda+i,\lambda-i$.

例 2 r 阶矩阵 $J_{\lambda_0}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \cdots & \\ & & \cdots & 1\\ & & & \lambda_0\end{pmatrix}$ 的初等因子为 $(\lambda-\lambda_0)^r$.

证明 J_{λ_0} 的行列式因子为 $\underbrace{1,\cdots,1}, (\lambda-\lambda_0)^r$, 从而 $d_r(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^r$, 所以 J_{λ_0} 的初等因子为 $(\lambda-\lambda_0)^r$. □

二. 不变因子组与初等因子组互相唯一确定

命题 1 数字矩阵的初等因子组被其不变因子组唯一确定，反之亦然.

证明 必要性. 由因式分解唯一性，即得.

充分性. 对给定的初等因子组 $P_j^{e_{ij}}(\lambda)$, 适当增加一些 1(表示为 $P_j^{e_{ij}}(\lambda)$,$e_{ij}=0$), 则可将这组初等因子按降幂排列如下：

$$\begin{array}{ll}
p_1^{e_{k1}}(\lambda), p_1^{e_{k-1,1}}(\lambda), \cdots, p_1^{e_{11}}(\lambda), & e_{k1} \geq e_{k-11} \geq \cdots \geq e_{11} \\
p_2^{e_{k2}}(\lambda), p_2^{e_{k-1,2}}(\lambda), \cdots, p_2^{e_{12}}(\lambda), & e_{k2} \geq e_{k-12} \geq \cdots \geq e_{12} \\
\cdots & \qquad\qquad \cdots \\
p_t^{e_{kt}}(\lambda), p_t^{e_{k-1,t}}(\lambda), \cdots, p_t^{e_{1t}}(\lambda), & e_{kt} \geq e_{k-1t} \geq \cdots \geq e_{1t}
\end{array}$$

令

$$\begin{array}{l}
d_k(\lambda) = p_1^{e_{k1}}(\lambda) p_2^{e_{k2}}(\lambda) \cdots p_t^{e_{kt}}(\lambda), \\
d_{k-1}(\lambda) = p_1^{e_{k-1,1}}(\lambda) p_2^{e_{k-1,2}}(\lambda) \cdots p_t^{e_{k-1,t}}(\lambda), \\
\cdots \\
d_1(\lambda) = p_1^{e_{11}}(\lambda) p_2^{e_{12}}(\lambda) \cdots p_t^{e_{1t}}(\lambda),
\end{array}$$

则 $d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda)$, $1 \leq i \leq k-1$.

因为 $|\lambda I - A|$ 的第 n 个行列式因子为首一 n 次多项式，故 A 的不变因子为 $1, \cdots, 1, d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_k(\lambda)$, 其中 1 的个数为 $n-k$, 由不变因子的唯一性即知由初等因子可唯一地确定 A 的不变因子. □

例 3 设 A 是一个 12 阶矩阵，初等因子组为

$$(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, (\lambda+1), (\lambda+1), (\lambda-i)^2, (\lambda+i)^2,$$

则 A 的不变因子组为

$$1, 1, \cdots, 1, (9 \text{ 个 } 1), (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2(\lambda+1), (\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2.$$

定理 1 数域 K 上的两个矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件是它们由相同的初等因子组，即矩阵的初等因子组是矩阵相似关系的完全不变量.

三. 初等因子组的计算 (以下在复数域上考虑)

初等因子的计算有更方便的方法.

引理 1 若 $(f(x), g(x)) = 1$, 且 $h(x) | f(x)$, 则 $(h(x), g(x)) = 1$.

证明 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1, f(x)=h(x)l(x), h(x)(l(x)u(x))+g(x)v(x)=1.$
□

引理 2 如果多项式 $f_1(\lambda),f_2(\lambda)$ 都与 $g_1(\lambda),g_2(\lambda)$ 互素，即 $(f_1,g_1)=(f_1,g_2)=(f_2,g_1)=(f_2,g_2)=1$, 则

$$(f_1(\lambda)g_1(\lambda),f_2(\lambda)g_2(\lambda))=(f_1(\lambda),f_2(\lambda))(g_1(\lambda),g_2(\lambda)).$$

证明 令 $(f_1(\lambda)g_1(\lambda),f_2(\lambda)g_2(\lambda))=d(\lambda)$, $(f_1(\lambda),f_2(\lambda))=d_1(\lambda)$, $(g_1(\lambda),g_2(\lambda))=d_2(\lambda)$, 则 $d_1(\lambda)|f_1(\lambda)$, 所以 $d_1(\lambda)|f_1(\lambda)g_1(\lambda)$. 同理 $d_1(\lambda)|f_2(\lambda)g_2(\lambda)$. 故 $d_1(\lambda)|d(\lambda)$. 同理 $d_2(\lambda)|d(\lambda)$.

因为 $(f_1,g_1)=1$, 所以 $f_1(\lambda)u(\lambda)+g_1(\lambda)v(\lambda)=1$,$f_1(\lambda)=d_1(\lambda)h(\lambda)$. $g_1(\lambda)=d_2(\lambda)k(\lambda)$, 所以 $d_1(\lambda)(h(\lambda)u(\lambda))+d_2(\lambda)(k(\lambda)v(\lambda))=1$, 故 $(d_1(\lambda),d_2(\lambda))=1$, 进一步有 $d_1(\lambda)d_2(\lambda)|d(\lambda)$.

又因为 $d(\lambda)|f_1(\lambda)g_1(\lambda)$, 由多项式的标准分解式，可令 $d(\lambda)=f(\lambda)g(\lambda)$, 其中 $f(\lambda)|f_1(\lambda),g(\lambda)|g_1(\lambda)$. 根据 $(f_1(\lambda),g_1(\lambda))=1$, 由引理知 $(f(\lambda),g(\lambda))=1$.

因为 $(f_1(\lambda),g_2(\lambda))=1$, 由引理知 $(f(\lambda),g_2(\lambda))=1$. 因为 $d(\lambda)|f_2(\lambda)g_2(\lambda)$, 由 $f(\lambda)|f_2(\lambda)g_2(\lambda)$ 得 $f(\lambda)|f_2(\lambda)$. 从而 $f(\lambda)|d_1(\lambda)$. 同理 $g(\lambda)|d_2(\lambda)$. 又因为 $f(\lambda),g(\lambda)=1$, 所以 $d(\lambda)|d_1(\lambda)d_2(\lambda)$. 于是 $d(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)$. □

引理 3 设

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda)\end{pmatrix}, B(\lambda)=\begin{pmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda)\end{pmatrix},$$

如果多项式 $f_1(\lambda),f_2(\lambda)$ 都与 $g_1(\lambda),g_2(\lambda)$ 互素，则 $A(\lambda),B(\lambda)$ 相抵.

证明 显然 $A(\lambda),B(\lambda)$ 有相同得二阶行列式因子，而 $A(\lambda),B(\lambda)$ 的一阶行列式因子分别为

$$d(\lambda)=(f_1(\lambda)g_1(\lambda),f_2(\lambda)g_2(\lambda)$$

和

$$\widetilde{d}(\lambda)=(f_2(\lambda)g_1(\lambda),f_1(\lambda)g_2(\lambda)$$

由上面的讨论知，$d(\lambda),\widetilde{d}(\lambda)$ 都等于 $d_1(\lambda)d_2(\lambda)$. 因而 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 也由相同的一阶行列式因子，所以 $A(\lambda)$ 和 $B(\lambda)$ 等价. □

定理 2 首先用初等变换化特征矩阵 $\lambda I-A$ 为对角形式，然后将主对角线上的元素分解成互不相同的一次因式方幂的乘积，则所有这些一次因式的方幂 (相同的按出现的次数计算) 就是 A 的全部初等因子.

证明 设 $\lambda I-A$ 已用初等变换化为对角型

$$D(\lambda)=\begin{pmatrix} h_1(\lambda) & & & \\ & h_1(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

其中每个 $h_i(x)$ 的最高项系数都为 1, 将 $h_i(x)$ 分解成互不相同的一次因式方幂的乘积：

$$h_i(x)=(\lambda-\lambda_1)^{e_{i1}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{i2}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{it}},\ 1\le i\le n,$$

要证明的是, 对于每个相同的一次因式的方幂 $(\lambda-\lambda_j)^{e_{1j}},(\lambda-\lambda_j)^{e_{2j}},\cdots,(\lambda-\lambda_j)^{e_{nj}}$, $1\le j\le n$ 在 $D(\lambda)$ 的主对角线上按递升幂次排列后，得到的新对角矩阵 $\widetilde{D}(\lambda)$ 与 $D(\lambda)$ 等价. 此时 $\widetilde{D}(\lambda)$ 就是 $\lambda I-A$ 的标准型且所有不为 1 的 $(\lambda-\lambda_j)^{e_{ij}}$ 就是 A 的所有初等因子.

为方便起见，先对 $\lambda-\lambda_1$ 的方幂进行讨论，令

$$g_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_2)^{e_{i2}}(\lambda-\lambda_3)^{e_{i3}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{it}}\ \ i=1,2,\cdots,n.$$

于是 $h_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{e_{i1}}g_i(\lambda)$, $1\le i\le n$, 而且每个 $(\lambda-\lambda_1)^{e_{i1}}$ 都与 $g_j(\lambda)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 互素. 如果由相邻的一对指数 $e_{i1}>e_{i+11}$, 则在 $D(\lambda)$ 中将 $(\lambda-\lambda_1)^{e_{i1}}$ 与 $(\lambda-\lambda_1)^{e_{i+11}}$ 对调位置，而其余因式保持不动，根据引理

$$\begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_1)^{e_{i1}}g_i(\lambda) & 0 \\ 0 & (\lambda-\lambda_1)^{e_{i+11}}g_{i+1}(\lambda) \end{pmatrix}$$

与

$$\begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_1)^{e_{i+11}}g_i(\lambda) & 0 \\ 0 & (\lambda-\lambda_1)^{e_{i1}}g_{i+1}(\lambda) \end{pmatrix}$$

等价，从而 $D(\lambda)$ 与对角阵

$D_1(\lambda) =$

$$\begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_1)^{e_{11}}g_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & (\lambda-\lambda_1)^{e_{i+11}}g_i(\lambda) & & & \\ & & & (\lambda-\lambda_1)^{e_{i1}}g_{i+1}(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & (\lambda-\lambda_1)^{e_{n1}}g_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

等价，然后对 D_1 作如上的讨论，如此继续进行，直到对角阵主对角线上元素所含 $(\lambda-\lambda_1)$ 的方幂是按递升排列为止，依次对 $(\lambda-\lambda_2),\cdots,(\lambda-\lambda_t)$ 作同样处理，最后便得到与 $D(\lambda)$ 等价的对角矩阵 $\widetilde{D}(\lambda)$, 它的主对角线上所含每个相同的一次因式的方幂都是按升幂次排列的. □

例 4 设 $\lambda I - A$ 经初等变换后为 $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & (\lambda-1)^2(\lambda+2) & & & \\ & & (\lambda+2) & & \\ & & & 1 & \\ & & & & (\lambda-1) \end{pmatrix}$, 则其初等因子为 $(\lambda-1),(\lambda+2),(\lambda+2),(\lambda-1)^2$. □

作业： P_{248} 1. (1) 2. (2)