§7.4　有理标准型

教学目的与要求 领会矩阵的有理标准型；掌握矩阵的极小多项式与不变因子的关系；对数字矩阵，写出其有理标准型.

一.　Frobenius 块

寻找一个比较简单的矩阵使它和给定的矩阵有相同的不变因子，矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda I-A$ 的法式为

$$\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda),\}$$

其中 $d_i(\lambda)$ 为首一非常数多项式，即 $\mathrm{diag}d_i(\lambda)\geq 1,i=1,\cdots,k$, 且 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda),A$ 的不变因子就是 $1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$.

引理 下列 r 阶矩阵 $F_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{r-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{r-2} \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$

的行列式因子等于 $1,\cdots,1,f(\lambda)$, 其中有 $r-1$ 个 $1,f(\lambda)=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots+a_r,F_1$ 的不变因子组也是 $1,\cdots,1,f(\lambda)$. 这里的 F_1 称为 Frobenius 块.

证明 F_1 的 r 阶行列式因子就是它的特征多项式

$$\widetilde{D_r}=|\lambda I-F_1|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_r \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{r-1} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_{r-2} \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda-a_1 \end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{r-1} \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{r-2} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_{r-3} \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda-a_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_r \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{r-1} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_{r-2} \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda-a_1 \end{vmatrix}_{r-1}$$

$$= \lambda \widetilde{D_{r-1}} + (-1)^r a_r \begin{vmatrix} -1 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}_{r-2}$$

$$= \lambda \widetilde{D_{r-1}} + a_r = \lambda^r + a_1 \lambda^{r-1} + \cdots + a_r.$$

而对任意的 $k < r$, $\lambda I - F_1$ 总有一个 k 阶子式，其值为 $(-1)^k$, 故 $D_k(\lambda) = 1$. □

二. 有理标准型

定理 1 设 A 是数域 K 上的 n 阶方阵， A 的不变因子组为

$$1, \cdots, 1, d_1(\lambda), \cdots, d_k(\lambda)$$

其中 $\mathrm{diag} d_i(\lambda) = m_i$, 则 A 相似于下列分块对角阵 $F = \begin{pmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_k \end{pmatrix}$

其中 F_i 的阶等于 m_i, 且 F_i 是形为引理 7.4-1 中的矩阵， F_i 的最后一列由 $d_i(\lambda)$ 系数 (除最高次项) 的负值组成.

证明 因为 $\lambda I - A$ 的秩为 n, 所以由设 A 的不变因子组为

$$1, \cdots, 1, d_1(\lambda), \cdots, d_k(\lambda)$$

意味着 $\lambda I - A$ 相抵于

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & d_1(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & d_k(\lambda) \end{pmatrix}.$$

而 $\lambda I - A$ 的第 n 个行列式因子即 A 的特征多项式 $|\lambda I - A|$, 由行列式因子的相抵不变性和首项系数为 1 可知 $|\lambda I - A| = d_1(\lambda) d_2(\lambda) \cdots d_k(\lambda)$, 而 $|\lambda I - A|$ 为 n 次多项式，所以 $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$, 矩阵 F_i 的行列式因子为 $1, \cdots, 1, d_i(\lambda)$, 其中共有 $m_i - 1$ 个 1, 将 $\lambda I - A$ 的法式做如下变动

$$\mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, d_1(\lambda); 1, \cdots, 1, d_2(\lambda), \cdots, 1, \cdots, 1, d_k(\lambda)\} \quad (*)$$

即在每个 $d_i(\lambda)$ 前配以 m_i-1 个 1,(*) 所示的矩阵仍与 $\lambda I-A$ 相抵，由引理知，$\lambda I-F$ 与 (*) 式所示矩阵相抵，于是 $\lambda I-A$ 与 $\lambda I-F$ 相抵，即 A 与 F 相似. □

例 1 根据下列不变因子组写出有理标准型

$$1,1,1,(\lambda+1),(\lambda+1)^2,(\lambda+1)^3$$

解 不变因子组可写为

$$1,1,1,(\lambda+1),(\lambda^2+2\lambda+1),(\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1)$$

变动后为

$$(\lambda+1);1,(\lambda^2+2\lambda+1);1,1,(\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1)$$

有理标准型为

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & 0 & -1 & & & \\ & 1 & -2 & & & \\ & & & 0 & & -1 \\ & & & 1 & 0 & -3 \\ & & & & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

例 2 求下列矩阵的有理标准型

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

解 $\lambda I-A=\begin{pmatrix} \lambda-1 & -3 & -3 \\ -3 & \lambda-1 & -3 \\ 3 & 3 & \lambda+5 \end{pmatrix}$

$D_1=1, A_{11}=(\lambda+2)^2, A_{12}=\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & \lambda+5 \end{vmatrix}=3(\lambda+2),$

$A_{13}=\begin{vmatrix} -3 & \lambda-1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=-3(\lambda+2), A_{21}=\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 3 & \lambda+5 \end{vmatrix}=-3(\lambda+2),$

$A_{22}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ 3 & \lambda+5 \end{vmatrix}=(\lambda+2)^2, A_{23}=-\begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=3(\lambda+2),$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ \lambda-1 & -3 \end{vmatrix}=3(\lambda+2), A_{32}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=3(\lambda+2)$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-4),$$

所以 $D_2=\lambda+2, D_3=(\lambda-1)(\lambda+2)^2$, 故 $d_1(\lambda)=\lambda+2, d_2(\lambda)=D_3/D_2=(\lambda-1)(\lambda+2)$, 这样， A 的不变因子组为

$$1, \lambda+2, (\lambda-1)(\lambda+2)$$

即 $\lambda+2; 1, \lambda^2+\lambda-2$, 故 A 的有理标准型为 $\begin{pmatrix} -2 & & \\ & 0 & 2 \\ & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

三. 极小多项式

引理 2 $F_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{r-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{r-2} \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$ 的极小多项式是 $m_{F_1}(\lambda)=f_{F_1}(\lambda)=\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+\cdots+a_r$.

证明 因为 F_1 的特征多项式是 $f(\lambda)$, 因此 F_1 适合多项式 $f(\lambda)$, 即 $f(\lambda)$ 是 F_1 的零化多项式，则 F_1 的极小多项式为 $f(\lambda)$, 若不然，有 $g(\lambda)$, 使 $g(F_1)=0$, 且 $\mathrm{diag}g(\lambda)<\mathrm{diag}f(\lambda)$, 设 $g(\lambda)=\lambda^s+l_1\lambda^{s-1}+\cdots+l_s, s<r, g(F_1)=F_1^s+l_1F_1^{s-1}+\cdots+l_sI=0$ 从而对任意 $\alpha\in K$ 都有 $g(F_1)\alpha=0$, 特别取 $\alpha=e_1$, 则亦必须成立 $g(F_1)e_1=0$, 而 $F_1e_1=e_2, F_1^2e_1=e_3, \cdots, F_1^se_1=e_{s+1}, g(F_1)e_1=e_s+l_1e_{s-1}+\cdots+l_se_1\neq 0, \forall l_i, i=1,\cdots,s$, 矛盾. $\square$

定理 2 设数域 K 上 n 的阶矩阵 A 的不变因子为

$$1,\cdots,1,d_1(\lambda),\cdots,d_k(\lambda)$$

其中 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda), i=1,\cdots,k-1$, 则 A 的极小多项式 $m(\lambda)=d_k(\lambda)$.

证明 设 A 的有理标准型为

$$F=\begin{pmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & F_k \end{pmatrix},$$

因相似矩阵有相同的极小多项式，故只需证明 F 的极小多项式是 $d_k(\lambda)$ 即可. 但是 F 为分块对角阵，由第六章知识知道 F 的极小多项式是诸 F_i 极小多项式的最小公倍式，而 F_i 的极小多项式正如引理所示恰为 $d_i(\lambda)$, 又因为 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$, 故诸 $d_i(\lambda)$ 的最小公倍式等于 $d_k(\lambda)$. $\square$

例 3 设矩阵 A 的所有特征值互异，求证 A 的特征多项式与极小多项式相等，并求 A 的有理标准型.

证明 设 A 的特征矩阵 $\lambda I - A$ 的行列式因子为 $D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_n(\lambda)$, 不变因子为 $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)$, 则 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda), d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_n(\lambda) = D_n(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$

若 $d_{n-1}(\lambda) \neq 1$, 则 $d_n(\lambda) = d_{n-1}(\lambda)g(\lambda)$, $D_n(\lambda) = d_{n-1}(\lambda)g(\lambda)\ d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_{n-2}(\lambda)$ 与设 $D_n(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n) = \prod\limits_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i), \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$ 矛盾. 所以 $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_{n-1}(\lambda) = 1, d_n(\lambda) = D_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$. 故 A 的有理标准型为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

作业： $P_{245}, 1(1), 2(1), 3, 4, 6.$

思考： $P_{245}, 5, 7.\ \ P_{266}, 1.$