§7.3　不变因子

教学目的与要求 熟练掌握 $\lambda-$ 矩阵的行列式因子和不变因子的定义；熟练掌握 $\lambda-$ 矩阵相抵与行列式因子及不变因子的关系；熟练掌握矩阵相似与行列式因子及不变因子的关系；领会矩阵相似与数域扩大无关.

一. 行列式因子

定义 1 设 $A(\lambda)$ 是 n 阶 $\lambda-$ 矩阵，k 是小于等于 n 的某个自然数，如果 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式的最大公因式 (它是首一多项式) 不等于零，则称这个多项式为 $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子，记为 $D_k(\lambda)$.

注 1 若 $r(A(\lambda))=r$, 则 $A(\lambda)$ 有 r 个行列式因子.

注 2 任意的 $A\in K^{n\times n}$, $\lambda I-A$ 必有 n 个行列式因子.

例 1

$\begin{pmatrix} (\lambda-1) & & \\ & (\lambda+1) & \\ & & (\lambda-1) \end{pmatrix}$ 的行列式因子为 $1,\lambda-1,(\lambda-1)^2(\lambda+1)$;

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & (\lambda-1) & \\ & & (\lambda-1)(\lambda+1) \end{pmatrix}$ 的行列式因子为 $1,\lambda-1,(\lambda-1)^2(\lambda+1)$;

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & (\lambda+1) & \\ & & (\lambda-1)^2 \end{pmatrix}$ 的行列式因子为 $1,1,(\lambda-1)^2(\lambda+1)$.

例 2 求下列矩阵的行列式因子：

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $d_i(\lambda)$ 为首一多项式，且 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda), i=1,2,\cdots,r-1$.

解 $A(\lambda)$ 的行列式因子为

$D_1(\lambda)=d_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)$, $\cdots$, $D_r(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda)$.

引理 1 设 $D_1(\lambda),D_2(\lambda),\cdots,D_r(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的行列式因子，则 $D_i(\lambda)|D_{i+1}(\lambda)$, 对一切 $i=1,2,\cdots,r-1$ 成立.

证明 设 $A_{i+1}(\lambda)$ 是 $A(\lambda)$ 的任一 $i+1$ 阶子式, 即在 $A(\lambda)$ 中任意取出 $i+1$ 行, $i+1$ 列组成的行列式, 将这个行列式按一行展开, 则其每一展开项都是一个多项式与一个 i 阶子式的乘积，由于 $D_i(\lambda)$ 是所有 i 阶子式的公因子，则 $D_i(\lambda)|A_{i+1}(\lambda)$, 而 $D_{i+1}(\lambda)$ 是所有这类 $A_{i+1}(\lambda)$ 的公因子，因此 $D_i(\lambda)|D_{i+1}(\lambda)$. □

二. 不变因子

定义 2 设 $D_1(\lambda),D_2(\lambda),\cdots,D_r(\lambda)$ 是 $\lambda-$ 矩阵 $A(\lambda)$ 的行列式因子, 则 $g_1(\lambda)=D_1(\lambda),g_2(\lambda)=D_2(\lambda)/D_1(\lambda),\cdots,g_r(\lambda)=D_r(\lambda)/D_{r-1}(\lambda)$, 称为 $A(\lambda)$ 的不变因子.

例 1 中不变因子分别为 $1,\lambda-1,(\lambda+1)(\lambda-1);1,\lambda-1,(\lambda+1)(\lambda-1);1,1,(\lambda+1)(\lambda-1)^2$.

例 2 中的不变因子为 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$.

定理 1 相抵的 $\lambda-$ 矩阵有相同的行列式因子，从而有相同的不变因子.

证明 只需证明行列式因子在任意的初等变换下保持不变即可.

(1) 第一类初等变换：交换 $A(\lambda)$ 的任意两行，则 $A(\lambda)$ 的 i 阶子式最多改变一个符号，所以行列式因子 (首一) 保持不变.

(2) 第二类初等变换： $A(\lambda)$ 的 i 阶子式与变换后的 i 阶子式最多差一个非零常数，故行列式因子 (首一) 保持不变.

(3) 第三类初等变换：记变换后的矩阵为 $B(\lambda), B(\lambda)$ 的 i 阶子式与 $A(\lambda)$ 的 i 阶的行列式为下列三种情形之一：

(a) 子式完全相同， p, q 不属于 $\{k_1, \cdots, k_i\}, A(\lambda) \stackrel{(p)+f(\lambda)(q)}{\longrightarrow} B(\lambda)$

(b) $p = k_s, q = k_t$, 则

$$B(\lambda)\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_s & \cdots & k_t & \cdots & k_i \\ l_1 & \cdots & l_s & \cdots & l_t & \cdots & l_i \end{pmatrix} = A(\lambda)\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_s & \cdots & k_t & \cdots & k_i \\ l_1 & \cdots & l_s & \cdots & l_t & \cdots & l_i \end{pmatrix}$$

(c) $p = k_s, q$ 不属于 $\{k_1, \cdots, k_i\}$,

$$B(\lambda)\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_s & \cdots & k_t & \cdots & k_i \\ l_1 & \cdots & l_s & \cdots & l_t & \cdots & l_i \end{pmatrix}$$

$$= A(\lambda)\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_s & \cdots & k_t & \cdots & k_i \\ l_1 & \cdots & l_s & \cdots & l_t & \cdots & l_i \end{pmatrix} + f(\lambda)A(\lambda)\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_s & \cdots & q & \cdots & k_i \\ l_1 & \cdots & l_s & \cdots & l_t & \cdots & l_i \end{pmatrix}$$

所以

$$D_i(\lambda)|A(\lambda)\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_s & \cdots & k_t & \cdots & k_i \\ l_1 & \cdots & l_s & \cdots & l_t & \cdots & l_i \end{pmatrix},$$

$$D_i(\lambda)|A(\lambda)\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_s & \cdots & q & \cdots & k_i \\ l_1 & \cdots & l_s & \cdots & l_t & \cdots & l_i \end{pmatrix}.$$

这样,

$$D_i(\lambda)|B(\lambda)\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_s & \cdots & k_t & \cdots & k_i \\ l_1 & \cdots & l_s & \cdots & l_t & \cdots & l_i \end{pmatrix},$$

对于任意的 $k_1, \cdots, k_i, l_1, \cdots, l_i$, 故 $D_i(\lambda)|B(\lambda)$的行列式因子$\widetilde{D_i}(\lambda)$, 同时 $A(\lambda)$ 也可由 $B(\lambda)$ 经第三类初等变换得到，所以 $\widetilde{D_i}(\lambda)|D_i(\lambda)$, 而 $D_i(\lambda), \widetilde{D_i}(\lambda)$ 为首一多项式，所以 $D_i(\lambda) = \widetilde{D_i}(\lambda)$. □

三. 矩阵相似的全系不变量

定理 2 数域 K 上的 n 阶数字矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件是它们的特征矩阵 $\lambda I - A$ 和 $\lambda I - B$ 具有相同的行列式因子或不变因子.

证明 显然，不变因子被行列式因子唯一确定，行列式因子也被不变因子唯一确定.

$$D_i(\lambda) = d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_i(\lambda), i = 1, 2, \cdots, n$$

所以数字矩阵 A, B 相似 $\Longleftrightarrow \lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 相抵 $\Longleftrightarrow \lambda I - A, \lambda I - B$ 有相同

行列式因子或不变因子，即

$$\lambda I - A \cong \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n(\lambda) \end{pmatrix} \cong \lambda I - B.$$

□

注 3 $\lambda I - A$ 的行列式因子及不变因子均称为 A 的行列式因子及不变因子.

推论 1 设 F, K 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的两个数域 $F \subseteq K$, 若 A 与 B 是 F 上的两个矩阵，则 A, B 在 F 上相似的充分必要条件是 A, B 在 K 上相似.

证明 必要性. 设 A, B 在 F 上相似，则 A, B 在 K 上相似.

充分性. 设 A, B 在 K 上相似，则 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 有相同的行列式因子，进而有相同的不变因子，而行列式因子的计算只涉及多项式的加，减，乘，公因式及数的加，减，乘，除，而数域对加，减，乘，除封闭及数域上的多项式对加，减，乘，公因式运算封闭，所以 $D_i(\lambda)$ 仍是 F 上多项式，所以 $d_i(\lambda)$ 也是 F 上多项式，与初等变换相对应的矩阵也是 F 上的 $\lambda-$ 矩阵，即在 F 上存在可逆 $\lambda-$ 矩阵 $P(\lambda), Q(\lambda), M(\lambda), N(\lambda)$, 使得

$$P(\lambda)(\lambda I - A)Q(\lambda) = M(\lambda)(\lambda I - B)N(\lambda) = \mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_n(\lambda)\},$$

表明 $\lambda I - A$ 与 $\lambda I - B$ 在 F 上相抵，所以 A, B 在 F 上相似. □

作业： $P_{242}, 1(1), 2(1), 3.$