§7.2　矩阵的法式

教学目的与要求 领会 $\lambda-$ 矩阵的相抵标准型的形式和意义；掌握 $\lambda-$ 矩阵可逆的充要条件；掌握 A 的特征矩阵的相抵标准型.

引理 1 设 $A(\lambda)=(a_{ij}(\lambda))_{m\times n}$ 为一非零 $\lambda-$ 矩阵，则 $A(\lambda)$ 必相抵于这样一个 $\lambda-$ 矩阵 $B(\lambda)=(b_{ij}(\lambda))$, 其中 $b_{11}(\lambda)\neq 0$ 且 $b_{11}(\lambda)|b_{ij}(\lambda)$.

证明 根据 $A(\lambda)$ 中不能被 $a_{11}(\lambda)$ 除尽的元素所在的位置分情况讨论.

(1) 若 $A(\lambda)$ 的第一列中有一个元素 $a_{i1}(\lambda)$ 不能被 $a_{11}(\lambda)$ 除尽，即有

$$a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$$

其中 $\deg r(\lambda)<\deg a_{11}(\lambda), r(\lambda)\neq 0$,

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ r(\lambda) & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} r(\lambda) & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ a_{11}(\lambda) & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}=B(\lambda).$$

如果 $B(\lambda)$ 的左上角元素符合要求，则 $B(\lambda)$ 为所求，若不符合要求，可重复步骤，由于 $r(\lambda)$ 次数小于 $a_{11}(\lambda)$ 次数，故必可在有限次变换后，使得左上角元素整除第一列所有元素.

(2) 同理可使左上角元素整除第一行所有元素.

(3) 若 $A(\lambda)$ 的第一行，第一列都可以被 $a_{11}(\lambda)$ 整除，而 $a_{ij}(\lambda)(i>1,j>1)$ 不可被 $a_{11}(\lambda)$ 整除，则设 $a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)\varphi(\lambda)$,

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij}(\lambda)-a_{11}(\lambda)\varphi(\lambda) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

$$\longrightarrow\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda) & \cdots & a_{ij}(\lambda)-a_{11}(\lambda)\varphi(\lambda)+a_{1j}(\lambda) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{ij}(\lambda)-a_{11}(\lambda)\varphi(\lambda) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$ 归结为 (2) 的情形.

□

定理 1 设 $A(\lambda)$ 是一个 n 阶 $\lambda-$ 矩阵，则 $A(\lambda)$ 相抵于对角阵

$$\mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0\},$$

其中 $d_i(\lambda)$ 为非零的首一多项式，且 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$, $1 \leq i \leq r-1$.

证明 对 n 用数学归纳法．当 $n=1$, 结论显然成立．现设 $A(\lambda)$ 为 n 阶 $\lambda-$ 矩阵．由引理 $A(\lambda) \cong B(\lambda) = (b_{ij}(\lambda))$, 其中 $b_{11}(\lambda)|b_{ij}(\lambda), (\forall i, j)$, 消去第 1 行，第 1 列，

$$B(\lambda) \longrightarrow \begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b'_{22}(\lambda) & \cdots & b'_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b'_{m2}(\lambda) & \cdots & b'_{mn}(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & 0 \\ 0 & C(\lambda) \end{pmatrix}.$$

$b_{11}(\lambda)|b'_{ij}(\lambda)$, 设 c 为 $b_{11}(\lambda)$ 首项系数，记 $d_1(\lambda) = c^{-1}b_{11}(\lambda)$, $\overline{B}(\lambda) = c^{-1}C(\lambda)$. 由归纳假设存在 $P(\lambda), Q(\lambda)$, 使

$$P(\lambda)\overline{B}(\lambda)Q(\lambda) = \mathrm{diag}\{d_2(\lambda), d_3(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0\},$$

且 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda), 1 \leq i \leq r-1$, 其中 $P(\lambda), Q(\lambda)$ 可写为有限个初等 $\lambda-$ 矩阵之积，于是

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1(\lambda) & 0 \\ 0 & \overline{B}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0\}, \end{aligned}$$

且 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}$ 可写为若干个 n 阶初等 $\lambda-$ 矩阵之积，只需证明 $d_1(\lambda)|d_2(\lambda)$ 即可．实际上 $d_1(\lambda)|b'_{ij}(\lambda)$, 所以 $P(\lambda)C(\lambda)Q(\lambda)$ 中任一元也可被 $d_1(\lambda)$ 整除．

注 1 定理中的 $\mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0\}$ 称为 $A(\lambda)$ 的法式．

注 2 r 称为 $A(\lambda)$ 的秩．

注 3 $r = n$ 推不出 $A(\lambda)$ 可逆．

注 4 $A(\lambda)$ 可逆 $\Longleftrightarrow$ $A(\lambda)$ 的法式为 I $\Longleftrightarrow$ $A(\lambda)$ 相抵于 I.

推论 1 任一 n 阶可逆 $\lambda-$ 矩阵都可以表示为有限个初等 $\lambda-$ 矩阵之积．

证明 设 $A(\lambda)$ 是 n 阶可逆 $\lambda-$ 矩阵，则存在 $P(\lambda), Q(\lambda)$, 使得

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = \mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0\},$$

因为 $P(\lambda), Q(\lambda)$ 为有限个初等 $\lambda-$ 矩阵之积，所以上式左边为可逆矩阵，故行列式为非零常数，所有右边行列式需为非零常数，故 $r = n$ 且 $d_i(\lambda) = d_i$(非零数).

这样， $A(\lambda) = P^{-1}(\lambda)\mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}Q^{-1}(\lambda)$,

因为初等 $\lambda-$ 矩阵的逆为初等 $\lambda-$ 矩阵，故 $\mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ 可表为 n 个初等矩阵 $P_i(d_i)$ 之积.

推论 2 设 $A \in K^{n\times n}$, 则

$$\lambda I - A \cong \mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_k(\lambda)\}$$

其中 $d_i(\lambda)$ 首一且 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda), 1 \le i \le k-1$.

证明 由定理知， $\lambda I - A \cong \mathrm{diag}\{c_1(\lambda), \cdots, c_r(\lambda), 0, \cdots, 0\}$, 其中 $c_i(\lambda)$ 首一，且 $c_i(\lambda)|c_{i+1}(\lambda), 1 \le i \le r-1$. 因为 $|\lambda I - A| = f_A(\lambda) \neq 0$. 所以左式的行列式也非零，故 $r = n$, 且 $f_A(\lambda) = c_1(\lambda)\cdots c_n(\lambda)$, 比较次数，即得结论.

注 5 推论中 $k = n \Longleftrightarrow \deg(d_i(\lambda)) = 1 \Longleftrightarrow d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_n(\lambda) = \lambda - \lambda_0 \Longleftrightarrow \lambda I - A \cong \lambda I - \lambda_0 I \Longleftrightarrow A$ 相似于 $\lambda_0 I \Longleftrightarrow A = \lambda_0 I$.

作业： $P_{239} : 1(1), 2(1), 3, 4.$