§7 Cauchy-Binet 公式及其应用 (介绍)

定理 (Cauchy-Binet 公式)

设 A 是 $m\times n$ 矩阵， B 是 $n\times m$ 矩阵. 则

$$|AB|=\begin{cases}0 & \text{当}m>n\\ |A|\cdot|B| & \text{当}m=n\\ \sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&m\\ j_1&j_2&\cdots&j_m\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}j_1&j_2&\cdots&j_m\\ 1&2&\cdots&m\end{pmatrix} & \text{当}m<n\end{cases}$$

定理 设 A 是 $m\times n$ 矩阵， B 是 $n\times m$ 矩阵， r 是自然数且 $r\le m$, 则

(1) 若 $r>n$, 则 AB 的任意一个 r 阶子式全为 0.

(2) 若 $r\le n$, 则 AB 的 r 阶子式

$$AB\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\ j_1&j_2&\cdots&j_r\end{pmatrix}=\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le n}A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\ k_1&k_2&\cdots&k_r\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}k_1&k_2&\cdots&k_r\\ j_1&j_2&\cdots&j_r\end{pmatrix}.$$

证明 设 $C=AB, C=(c_{ij})_{m\times m}$, 则 $c_{ij}=a_{ia}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$.

所以 $C\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\ j_1&j_2&\cdots&j_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{i_11}&a_{i_12}&\cdots&a_{i_1n}\\ a_{i_21}&a_{i_22}&\cdots&a_{i_2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{i_r1}&a_{i_r2}&\cdots&a_{i_rn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{1j_1}&b_{1j_2}&\cdots&b_{1j_r}\\ b_{2j_1}&b_{2j_2}&\cdots&b_{2j_r}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ b_{nj_1}&b_{nj_2}&\cdots&b_{nj_r}\end{pmatrix}$

由 Cauchy-Binet 公式,

当 $r>n$ 时， $C\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\ j_1&j_2&\cdots&j_r\end{pmatrix}=0.$

当 $r\le n$ 时,

$$C\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\ j_1&j_2&\cdots&j_r\end{pmatrix}=\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le n}A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_r\\ k_1&k_2&\cdots&k_r\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}k_1&k_2&\cdots&k_r\\ j_1&j_2&\cdots&j_r\end{pmatrix}.\square$$

例 $(AB)^*=B^*A^*$.

证明 记 M_{ij},N_{ij},P_{ij} 分别是 A,B,C 中第 (i,j) 个元素的余子式， A_{ij},B_{ij},C_{ij} 分别是 A,B,C 中第 (i,j) 个元素的代数余子式. $(AB)^*$ 中第 (i,j) 个元素为 $C_{ji}=(-1)^{i+j}P_{ji}=(-1)^{i+j}\sum_{k=1}^n M_{jk}N_{ki}=\sum_{k=1}^n(-1)^{j+k}M_{jk}(-1)^{i+k}N_{ki}=\sum_{k=1}^n A_{jk}B_{ki}=B^*A^*$ 的第 (i,j) 个元素. $\square$