§6 分块矩阵

教学目的与要求 掌握分块矩阵的运算，特别是块初等变换的应用.

对 $m \times n$ 矩阵 A, 先用若干条横线将其划成 r 块，再用若干条竖线把它划成 s 块，我们就得到了 rs 块分块矩阵，可记为

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 是 $m_i \times n_j$ 矩阵， $1 \le i \le r, 1 \le j \le s$, 满足 $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$. A_{ij} 称为 A 的第 (i, j) 块， A 可记为 $A = (A_{ij})$, 但要注明这是分块矩阵.

1. 分块阵的相等

分块矩阵 $A = (A_{ij})_{r\times s}, B = (B_{ij})_{l\times k}$ 称为相等，如果 $r = l, s = k$ 且 $A_{ij} = B_{ij}, 1 \le i \le r, 1 \le j \le s$.

2. 分块阵的加法

设 $m \times n$ 矩阵 A, B 有相同的分块，即 $A = (A_{ij})_{r\times s}, B = (B_{ij})_{r\times s}$, 且 A_{ij} 与 B_{ij} 作为矩阵的行列数分别相等，则 $A + B = (A_{ij} + B_{ij})_{r\times s}$.

3. 分块阵的数乘

$A = (A_{ij})_{r\times s},\ aA = (cA_{ij})_{a\times s}$

4. 分块阵的乘法

设 $A = (A_{ij})_{r\times s}, B = (B_{ij})_{s\times t}$(注意 A 的列分成 s 块， B 的行分成 s 块) . 又设 A 与 B 的分块适合如下条件：

$n_1 \quad n_2 \quad \cdots \quad n_s \qquad\qquad\qquad\qquad l_1 \quad l_2 \quad \cdots \quad l_t$

$$A=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \\ m_r \end{array}\end{array},\ B=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \\ \\ n_r \end{array}\end{array}$$

则 $C=AB=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{r1} & C_{r2} & \cdots & C_{rt} \end{pmatrix}$. 其中 C_{ij} 是 $m_i \times l_j$ 矩阵且

$$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{is}B_{sj}.$$

例 1 设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix}$. 其中 A_i 与 B_i, $1 \le i \le k$ 都是 n 阶方阵. 则

(1) $AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_kB_k \end{pmatrix}$;

(2) $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_k|$;

(3) A 可逆的充分必要条件是 A_i 可逆, $1 \le i \le k$;

(4) A 可逆时, $A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k^{-1} \end{pmatrix}$.

注 $\begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix} \ne \begin{pmatrix} & A^2 \\ B^2 & \end{pmatrix}$.

例 2 设 $A_{m\times n}, B_{n\times r}$. 记 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r), \beta_j$ 是 n 维列向量, $1 \le j \le r$, 则 $AB=(A\beta_1, A\beta_2, \cdots, A\beta_r)$. 记 $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$, α_i 是 n 维行向量, $1 \le i \le m$, 则 $AB=\begin{pmatrix} \alpha_1 B \\ \alpha_2 B \\ \cdots \\ \alpha_m B \end{pmatrix}$.

例 3 (1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$,

$$即 \begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ 0_1 & \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} & I_{n-2} \\ 0_2 & \end{pmatrix}.$$

一般地，$\begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ 0_1 & \end{pmatrix}^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} & I_{n-k} \\ 0_k & \end{pmatrix} & k \le n-1 \\ 0 & k \ge n \end{cases}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \end{pmatrix}$,

$$即 \begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ 1 & \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} & I_{n-2} \\ I_2 & \end{pmatrix}.$$

一般地，$\begin{pmatrix} & I_{n-1} \\ 1 & \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} & I_{n-k} \\ I_k & \end{pmatrix}, 1 \le k \le n.$

证明 (1) 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $AA = A(0, e_1, \cdots, e_{n-1}) = (0, Ae_1, Ae_2, \cdots, Ae_{n-1})$ $= (0, 0, e_1, \cdots, e_{n-2}) = \begin{pmatrix} & I_{n-2} \\ 0 & \end{pmatrix}$.

类似可以证明其余结论. □

5. 方块阵的转置

$A = (A_{ij})_{r\times s}$, 则 $A' = (A'_{ji})_{s\times r}$.

6. 方块阵的共轭

$A = (A_{ij})_{r\times s}$, 则 $\overline{A} = (\overline{A}_{ij})_{r\times s}$.

7. 方块初等变换和块初等矩阵

例 4 设

$$A=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} h & l \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} r \\ s \end{array} \end{array}$$

则 $\begin{pmatrix} I_r & \\ K & E_s \end{pmatrix} A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ KA_{11}+A_{21} & KA_{12}+A_{22} \end{pmatrix}$;

$A\begin{pmatrix} I_h & \\ K & I_l \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}+A_{12}K & A_{12} \\ A_{21}+A_{22}K & A_{22} \end{pmatrix}$. 注意 K 的前后位置.

$\begin{pmatrix} I_r & \\ & N_{s\times s} \end{pmatrix} A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ NA_{21} & NA_{22} \end{pmatrix}$

当 $r=s$ 时, $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ I_s & 0 \end{pmatrix} A=\begin{pmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}$.

例 5 设 A 是 m 阶可逆阵, D 是 n 阶方阵, 则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|$.

证明 因为

$$\begin{pmatrix} I_m & \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

两边取行列式，得

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|. \quad \square$$

注 若 A 是 m 阶方阵, D 是 n 阶可逆阵, 则 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|D||A-BD^{-1}C|$.

例 6 设 A 是 $n\times m$ 矩阵, B 是 $m\times n$ 矩阵. 则 $|I_n-AB|=|I_m-BA|$.

证明

$$\begin{pmatrix} I_n & \\ -B & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_n & A \\ & I_m-BA \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_n & -A \\ & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_n-AB & O \\ B & I \end{pmatrix}.$$

两边取行列式，利用 Laplace 定理，有

$$\begin{aligned} |I_m-BA| &= \begin{vmatrix} I_n & A \\ & I_m-BA \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} I_n & \\ -B & I_m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} I_n & -A \\ & I_m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_n & A \\ B & I_m \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} I_n-AB & O \\ B & I \end{vmatrix}=|I_n-AB|. \quad \square \end{aligned}$$

例 7 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{vmatrix}.$$

解 原式 $=\left|\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - I_n\right|$

$$= (-1)^n\left|I_n - \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (-1)^n\left|I_2 - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & a_n \\ \cdots & \cdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (-1)^n\begin{vmatrix} 1-\sum_{i=1}^n a_i^2 & -\sum_{i=1}^n a_i \\ -\sum_{i=1}^n a_i & 1-n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n[(1-n)(1-\textstyle\sum_{i=1}^n a_i^2) - (\sum_{i=1}^n a_i)^2]. \quad \square$$

例 8 已知 A, D 是可逆阵，求 $\begin{pmatrix} A & B \\ & D \end{pmatrix}^{-1}$.

解法 1

$$\begin{pmatrix} A & B \\ & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} AX+BZ=I \\ AY+BW=O \\ DZ=O \\ DW=I \end{cases}$$

解得 $X=A^{-1}, Z=O, W=D^{-1}, Y=-A^{-1}BW=-A^{-1}BD^{-1}$.

解法 2 $\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & I & \\ & D & & I \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} A & & I & -BD^{-1} \\ & D & & I \end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{cc|cc} I & & A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ & I & & D^{-1} \end{array}\right)$$

所以

$$\begin{pmatrix} A & B \\ & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ & D^{-1} \end{pmatrix}$$

解法 3

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{pmatrix} A & B \\ & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \\ & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

作业： P_{82} 2(1)， 5， 7，

P_{87} 9， 23

补充作业：计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_1^2+1 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2+1 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2+1 \end{vmatrix}.$$