§5 矩阵乘积的行列式与初等矩阵求逆阵

教学目的与要求 掌握矩阵乘积的行列式等于行列式的乘积这个结论，掌握矩阵可逆的充分必要条件，掌握用初等变换计算矩阵的逆的方法.

定理 设 A, B 是 n 阶矩阵，则 $|AB| = |A||B|$.

证明 记 $C = AB = (c_{ij})_{n\times n}$. 则

$$\begin{vmatrix} A & \\ -I_n & B \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & & & & \\ -1 & & & & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & -1 & & & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & & & & \\ -1 & & & & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & -1 & & & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & & & & \\
-1 & & & & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\
 & -1 & & & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\
 & & \ddots & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \\
-1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\
0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

由 Laplace 展开定理，得

$$|AB| = (-1)^{1+\cdots+n+n+1+\cdots+2n+n}|C| = (-1)^{n(2n+1)+n}|C| = |C|. \qquad \square$$

推论 设 A 是 n 阶方阵，则下列命题等价：

(1) A 可逆；

(2) 存在 B, 使得 $AB = I_n$;

(3) 存在 B, 使得 $BA = I_n$;

(4) $|A| \neq 0$;

(5) $A \cong I_n$;

(6) A 可表示为若干个初等矩阵之积.

证明 (1)⇒(2)(3): 显然；

(2)(3)⇒(4): 利用上面定理；

(4)⇒(5): 因为 $P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}\ (r)$, 其中 P_i, Q_j 是初等矩阵， $1 \le i \le s, 1 \le j \le t$. 所以 $|A| \ne 0$ 的充分必要条件是 $r = n$;

(5)⇒(6): 因为 $P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t = I_n$, 而初等矩阵是可逆的, 故有 $A = P_1^{-1}P_2^{-1}\cdots P_s^{-1}Q_t^{-1}\cdots Q_2^{-1}Q_1^{-1}$.

(6)⇒(1): 初等矩阵是可逆的，而可逆矩阵的乘积是可逆的. □

注 由上面的推论可知， $A \cong B$ 的充分必要条件是存在可逆矩阵 P, Q, 使得 $PAQ = B$.

例 1 A 可逆，则 A 可经过有限次行初等变换化为 I_n; 也可经过有限次列初等变换化为 I_n.

例 2 设 $AB = A + B$. 求证： (1)$A - I$ 可逆； (2)$AB = BA$.

证明 (1) $(A - I)(B - I) = I$;

(2) 由 (1) 知 $(B - I)(A - I) = I$, 展开得 $BA = A + B$, 从而 $AB = BA$. □

例 3 计算 $n + 1$ 阶行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}$$

解 $A = \begin{pmatrix} 1 & C_n^1 a_0 & C_n^2 a_0^2 & \cdots & C_n^n a_0^n \\ 1 & C_n^1 a_1 & C_n^2 a_1^2 & \cdots & C_n^n a_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_n^1 a_n & C_n^2 a_n^2 & \cdots & C_n^n a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0^n & b_1^n & b_2^n & \cdots & b_n^n \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & b_2^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

所以 A 的行列式是两个 Vander Monde 行列式的乘积，故

$$|A| = C_n^1 C_n^2 \cdots C_n^{n-1} \prod_{0 \le j < i \le n} (a_i - a_j)(b_j - b_i). \quad \square$$

下面介绍利用初等变换求矩阵的逆的方法．设 $A^{-1}=Q_1\cdots Q_t$, 其中 Q_i, $1\le i\le t$, 是初等矩阵．则

$$Q_1\cdots Q_tA=I_n, Q_1\cdots Q_tI_n=A^{-1},$$

因为矩阵左乘一个初等矩阵相当一做一次行的初等变换．故我们可以利用对矩阵 (A,I_n) 做行的初等变换得到 A^{-1}, 即

$$(A,I_n)\stackrel{\text{行初等变换}}{\longrightarrow}(I_n,A^{-1}).$$

例 4 求 A^{-1}, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&4\end{pmatrix}$$

例 5 解矩阵方程

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\2&-1&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-1&0\end{pmatrix}$$

作业：设 A 为 n 阶可逆阵，若 A 的每一行元素之和等于常数 c. 求证： A^{-1} 的每一行元素之和等于 c^{-1}.

作业： P_{73} 1(2)，2，3;

P_{87} 8，10，13，20.