§4 矩阵的初等变换与初等矩阵

教学目的和要求 熟练掌握矩阵的初等变换，以及与初等矩阵的对应．理解矩阵相抵关系及应用.

一．高斯消去法

解线性方程组的高斯消去法.

二．初等变换

定义 矩阵的初等变换指的是：

(1) 互换变换：交换矩阵中某两行 (列);

(2) 数乘变换：用一非零常数乘以矩阵的某一行 (列);

(3) 消法变换：将矩阵的某一行 (列) 乘以数 c 后加到另一行 (列).

定理 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 必可经过一系列行和列的初等变换化为如下形式矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} (*)$$

证明 若 $A=0$, 结论显然成立.

若 $A\neq 0$, 不妨设 $a_{11}\neq 0$. 否则，设 $a_{ij}\neq 0$, 可经行和列的互换调到 (1,1) 位置．第一行乘 $-a_{11}^{-1}a_{i1}$ 加到第 i 行上 $(1\leq i\leq m)$, 则 A 第一列元素除 a_{11} 外全为 0; 将第一列乘以 $-a_{11}^{-1}a_{1j}$ 加到第 j 列上 $(1\leq j\leq m)$, 则除 a_{11} 外第一列元素全为 0. 将第一行乘以 a_{11}^{-1}, 得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

类似，记第 (2,2) 位置非零，用同样办法可使第二行和第二列除 (2,2) 外全为 0. 不断做下去，直到变为 $(*)$ 式. $\square$

例 经过一系列的行与列的初等变换，$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

三. 初等矩阵

定义 对单位矩阵作一次初等变换所得到的矩阵称为初等矩阵.

(1) 互换矩阵：

$$P_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

(2) 数乘矩阵：

$$P_i(c) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

其中 $c \neq 0$;

(3) 消法矩阵：

$$T_{ij}(c) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & c & \cdots & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (i) \\ \\ (j) \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

定理 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，对 A 作一次行的初等变换相当于左乘一个 m 阶相应初等矩阵，对 A 作一次列的初等变换相当于右乘一个 n 阶相应的初等矩阵.

证明 只对行初等变换进行证明．分别计算 $P_{ij}A$，$P_i(c)A$，$T_{ij}(c)A$ 即可． □

推论 初等矩阵均可逆，且 $P_{ij}^{-1}=P_{ij}$, $P_i(c)^{-1}=P_i(c^{-1})$, $T_{ij}(c)^{-1}=T_{ij}(-c)$.

四．矩阵的相抵

定义 矩阵 A 经过有限次初等变换后变成 B, 则称 A 与 B 是相抵的，记为 $A\cong B$.

注 因为对矩阵做一次行 (列) 的初等变换相当与左 (右) 乘一个相应的初等矩阵，所以 $A\cong B$ 的充分必要条件是存在初等矩阵 P_i, Q_j, $1\le s$, $1\le j\le t$, 使得

$$P_s\cdots P_2P_1AQ_1Q_2\cdots Q_t=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

定理 矩阵的相抵关系满足 (1) 反身性，即 $A\cong A$; (2) 对称性，即若 $A\cong B$, 则 $B\cong A$; (3) 传递性，即若 $A\cong B$, $B\cong C$, 则 $A\cong C$.

例 n 阶方阵 A 不可逆的充分必要条件是存在不为 0 的方阵 B, 使得 $AB=0$.

证明 必要性．若 A 可逆，则从 $AB=0$ 可得 $B=0$, 与 B 不为 0 矛盾.

充分性．若 A 是奇异矩阵，则存在可逆矩阵 P,Q 使 $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 令 $C=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$, 则 $PAQC=0$, 故 $AQC=0$. 令 $B=QC$, 则结论成立. □

作业： P_{67} 3