# §3 方阵的逆阵

**教学目的和要求** 理解和熟练掌握矩阵的逆的概念与性质，掌握用伴随矩阵求逆的方法与相关性质.

## 一. 可逆的定义与性质

**定义** 设 $A$ 是一个 $n$ 阶方阵. 若存在一个 $n$ 阶方阵 $B$, 使得

$$AB = BA = I_n,$$

则称 $B$ 是 $A$ 的逆阵. 称 $A$ 是可逆阵 (或称为非奇异矩阵), 否则称为非可逆阵 (或称为奇异阵).

**命题** 若 $n$ 阶方阵 $A$ 可逆，则逆阵唯一，记为 $A^{-1}$.

**证明** 设 $B, C$ 是 $A$ 的逆矩阵，则 $AB = BA = I$, $AC = CA = I$. 所以 $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. □

**注** 1 只有 $n$ 阶方阵可讨论是否可逆.

**注** 2 并非任一非零阵有逆，如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不可逆. 事实上，若 $A$ 有一行或一列全为零，则 $A$ 不可逆.

**注** 3 若 $AB = AC$ 且 $A$ 可逆，则 $B = C$; 若 $BA = CA$ 且 $A$ 可逆，则 $B = C$.

**注** 4 $A^{-1}BA = B$ 一般不成立.

**性质**

(1) 若 $A$ 可逆，则 $(A^{-1})^{-1} = A$;

(2) 设 $A, B$ 可逆，则 $AB$ 可逆且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(3) 若 $A$ 可逆， $c$ 非零数，则 $cA$ 可逆且 $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$;

(4) 若 $A$ 可逆，则 $A'$ 可逆且 $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;

(5) 若 $A$ 可逆，则 $\overline{A}$ 可逆且 $(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$.

**注** $n$ 阶方阵 $A_i$ 可逆， $1 \le i \le r$, 则 $(A_1A_2\cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

**注** $n$ 阶方阵 $A, B$ 可逆， $A+B$ 未必可逆.

## 二. $A$ 的伴随矩阵

**定义** 设 $A$ 是一个 $n$ 阶方阵, 行列式 $|A|$ 中元素 $a_{ij}$ 的代数余子式记为 $A_{ij}$, 称下列矩阵为 $A$ 的伴随矩阵，记为 $A^*$.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

**命题** $AA^* = A^*A = |A|I_n$.

**证明**

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \delta_{ij}|A|;$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \delta_{ij}|A|. \quad \square$$

**定理** 若 $|A| \ne 0$, 则 $A$ 可逆，且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$

**例** 1 $A^3 + A^2 + A + I = 0$, 则 $A$ 可逆.

**例** 2 $A \ne I, A^2 = I$, 则 $A + I$ 不可逆.

**例** 3 $A, B, A+B$ 是可逆阵，则 $A^{-1} + B^{-1}$ 也可逆.

**分析** $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$.

**证明** 因为 $B(A^{-1}+B^{-1})A(A+B)^{-1} = I$, 所以 $(A^{-1}+B^{-1})A(A+B)^{-1}B = I$. 同理， $A(A+B)^{-1}B(A^{-1}+B^{-1}) = I$. 所以 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B$. $\square$

**例** 4 设 $A$ 为 $n$ 阶方阵， $X, \beta$ 为 $n$ 维列向量，且 $AX = \beta$. 若 $|A| \ne 0$, 则 $X = A^{-1}\beta$. 这就是 Cramer 法则.

作业： $\mathrm{P}_{58}$ 1(1), 6, 9, 10.