§2 矩阵的运算

教学目的和要求 理解和掌握矩阵的相等的定义，理解和掌握矩阵的加法，数乘，乘法的定义和运算律. 了解矩阵的转置满足的性质与对称阵，反对称阵的定义，掌握标准向量和基础矩阵的性质，了解方阵的迹的定义.

一. 矩阵的相等

两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{s\times t}$ 相等，如果它们的行数与列数相等，并且对应元素相等，即 $m=s, n=t$, 且 $a_{ij}=b_{ij}$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$.

二. 矩阵的加法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}$, 定义 A 和 B 的加法为 $A+B:=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

例 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

矩阵的加法满足：

(1) 交换律：　$A+B=B+A$;

(2) 结合律：　$(A+B)+C=A+(B+C)$;

(3) 存在零矩阵：　$0+A=A+0=A$;

(4) 存在负矩阵：对任意 A, 存在 B, 使得 $A+B=0$.

易知，(4) 中的 B 是唯一确定的，即 $B=(-a_{ij})$. 记 $B=-A$. 故可以定义矩阵的减法 $A-B:=A+(-B)$.

三. 矩阵的数乘

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, c 是一个数，定义 c 和 A 的数乘为 $cA:=(ca_{ij})_{m\times n}$.

矩阵的数乘满足：

(5) $c(A+B)=cA+cB$;

(6) $(c+d)A = cA + dA$;

(7) $(cd)A = c(dA)$;

(8) $1A = A$;

注 $0A = 0$.

四．矩阵的乘法

设 $A = (a_{ij})_{m\times k}$, $B = (b_{ij})_{k\times n}$, 定义 A 与 B 的乘法为 $C = AB := (c_{ij})_{m\times n}$, 其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj}$.

注 A 的列数等于 B 的行数才可作乘法，这时 AB 的行数等于 A 的行数， AB 的列数等于 B 的列数， c_{ij} 是 A 的第 i 行和 B 的第 j 列对应元素乘积之和．今后如不注明情况，均指 AB 乘法有定义.

例 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 3 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 则 $AB = 1$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

例 4 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 则 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

注 矩阵乘法的交换律不成立.

例 5 设

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

则上述方程组用矩阵乘法就可简写成

$$AX=\beta.$$

矩阵乘法满足：

(1) 结合律 $(AB)C=A(BC)$;

(2) 分配律 $A(B+C)=AB+AC,(A+B)C=AC+BC$;

(3) $a(AB)=(aA)B=A(aB)$;

(4) $I_mA_{m\times n}=A=A_{m\times n}I_n$.

证明 (1) 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}$, $C=(c_{ij})_{p\times q}$. 则 (AB) 的第 i 行为 $\begin{pmatrix} \sum_{r=1}^n a_{ir}b_{r1}, & \sum_{r=1}^n a_{ir}b_{r2}, & \cdots, & \sum_{r=1}^n a_{ir}b_{rp} \end{pmatrix}$, C 的第 j 列为

$$\begin{pmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \cdots \\ c_{pj} \end{pmatrix}.$$

所以 $(AB)C$ 的第 (i,j) 个元素为

$$(\sum_{r=1}^n a_{ir}b_{r1})c_{1j}+(\sum_{r=1}^n a_{ir}b_{r2})c_{2j}+\cdots+(\sum_{r=1}^n a_{ir}b_{rp})c_{pj}$$

$$=\sum_{k=1}^p(\sum_{r=1}^n a_{ir}b_{rk})c_{kj}=\sum_{r=1}^n\sum_{k=1}^p a_{ir}b_{rk}c_{kj}.$$

同理，(BC) 的第 j 列为

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^p b_{1k}c_{kj} \\ \sum_{k=1}^p b_{2k}c_{kj} \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^p b_{nk}c_{kj} \end{pmatrix},$$

A 的第 i 行

$$\begin{pmatrix} a_{i1}, & a_{i2}, & \cdots, & a_{in} \end{pmatrix}.$$

所以 $A(BC)$ 的第 (i,j) 个元素为

$$a_{i1}(\sum_{k=1}^p b_{1k}c_{kj})+a_{i2}(\sum_{k=1}^p b_{2k}c_{kj})+\cdots+a_{in}(\sum_{k=1}^p b_{nk}c_{kj})$$

$$= \sum_{r=1}^{n} a_{ir}(\sum_{k=1}^{p} b_{rk}c_{kj}) = \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ir}b_{rk}c_{kj}.$$

故 $A(BC) = (AB)C$.

(2)-(4) 验证留做思考题. $\square$

注 1 乘法的消去律不成立. 即

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C,$$

$$BA = CA \not\Rightarrow B = C.$$

注 2 设 A 为 n 阶方阵, 定义 A 的幂为 $A^r := \underbrace{AA\cdots A}_{r}$. 显然有

(1) $A^rA^s = A^{r+s}$;

(2) $(A^r)^s = A^{rs}$;

(3) 若 $AB = BA$, 则 $(A+B)^n = A^n + C_n^1A^{n-1}B + C_n^2A^{n-2}B^2 + \cdots + C_n^{n-1}AB^{n-1} + B^n$.

注 3 $0A = 0 = A0$.

注 4 设 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$. 对 $A_{n\times n}$, 定义 $f(A) := a_0I_n + a_1A + \cdots + a_mA^m$.

五. 矩阵的转置

定义 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 的转置为 $n\times m$ 矩阵 A', 其中 A' 的第 k 行是 A 的第 k 列, $1 \le k \le n$, A' 的第 r 列是 A 的第 r 行, $1 \le r \le m$.

矩阵的转置满足:

(1) $(A')' = A$;

(2) $(A+B)' = A' + B'$;

(3) $(aA)' = aA'$;

(4) $(AB)' = B'A'$.

证明 (4) 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times p}$, 则 AB 的第 (i,j) 个元素为 $c_{ij}=\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{rj}$. 所以 $(AB)'$ 的第 (j,i) 个元素为 $c_{ij}=\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{rj}$, $B'A'$ 的第 (j,i) 个元素为 B' 的第 j 行元素与 A' 的第 i 列元素对应乘积之和. 但 B' 的第 j 行元素为 B 的第 j 列元素， A' 的第 i 列元素为 A 的第 i 行元素，它们对应元素乘积之和恰为 $b_{1j}a_{i1}+b_{2j}a_{i2}+\cdots+b_{nj}a_{in}=c_{ij}$. 所以 $(AB)'=B'A'$. $\square$

若 $A'=A$, 即 $a_{ij}=a_{ji}$, $1\le i,j\le n$, 则称方阵 A 为 **对称阵**. 若 $A'=-A$, 即 $a_{ij}=-a_{ji}$, $1\le i,j\le n$, 则称 A 为 **反对称阵**.

例 1 对任意 n 阶方阵 A, $(A+A')$ 是对称阵 ; $(A-A')$ 是反对称阵.

例 2 对角阵是对称阵；反对称阵的对角元素为 0; 零矩阵 0 既是对称阵，又是反对称阵.

六. 矩阵的共轭

复数 $z=a+bi$ 的共轭复数记为 $\overline{z}:=a-bi$.
设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 是复矩阵，则 $\overline{A}=(\overline{a}_{ij})_{m\times n}$ 称为 A 的共轭矩阵.

矩阵的共轭满足：

(1) $(\overline{A+B})=\overline{A}+\overline{B}$;

(2) $(\overline{cA})=\overline{c}\overline{A}$;

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\ \overline{B}$;

(4) $(\overline{A'})=(\overline{A})'$.

七. 标准单位向量与基础矩阵

$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \cdots, e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 称为 n 维标准列向量; $e_1', e_2', \cdots, e_n'$ 称为 n 维标准行向量.

性质 (1) $e_i'e_j=\delta_{ij}$, 其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号， $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\ne j\end{cases}$.

(2) $A_{m\times n}e_i$ 是 A 的第 i 列， $e_iA_{m\times n}$ 是 A 的第 i 行.

(3) $e_i'A_{m\times n}e_j = a_{ij}$.

m 维标准单位列向量 e_i 和 n 维单位行向量 e_j' 的乘积 e_ie_j' 称为 n 阶基础矩阵，记为 E_{ij}. 基础矩阵 E_{ij} 的第 (i,j) 分量是 1, 其它分量都是 0.

性质 (1) $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$;

(2) 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 则 $A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$;

(3) $E_{ij}A$ 将 A 第 j 行变为第 i 行，其余元素为 0; AE_{ij} 将 A 第 i 列变为第 j 列，其余元素为 0.

(4) $E_{ij}AE_{kl} = a_{jk}E_{il}$.

八．方阵的迹

设 A 是 n 阶矩阵，则 $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ 称为方阵 A 的迹，记为 $tr(A)$.

性质 (1) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$;

(2) $tr(kA) = ktr(A)$;

(3) $tr(A') = tr(A)$;

(4) $tr(AB) = tr(BA)$;

(5) $tr(A^{-1}BA) = tr(B)$.

证明 留做练习.

作业：

补充：验证方阵的迹的性质 $tr(AB) = tr(BA)$, 其中 A, B 均为 n 阶方阵.

P_{53} 1(1), 2(1), 4(2); P_{54} 9, 10, 12(2), 14(1)(2).