第二章　矩阵

§1 矩阵的概念

教学目的和要求 熟练掌握矩阵的定义.

定义 由 $m\times n$ 个数 a_{ij}, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, 排成 m 行 n 列的如下矩形阵列

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵.

注 1 m 行 n 列矩阵 A 简记为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, 其中 a_{ij} 称为矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素，简称为 A 的第 (i,j) 元素.

注 2 如果矩阵 A 的元素全是实数，则称 A 为 **实矩阵**; 如果 A 的元素全为复数，则称之为 **复矩阵**. 所有元素均为零的矩阵，叫 **零矩阵**, 记为 0.

注 3 n 行 n 列的矩阵称为 n **阶方阵**. 若 A 是 n 阶方阵, 则元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为 A 的主对角线元素. 若一个方阵除了对角线上的元素外其余元素都等于零，则称之为 **对角阵**. 记对角阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

为 $\mathrm{diag}\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}\}$.

特别地，$I_n := \mathrm{diag}\{1, 1, \cdots, 1\}$ 称为 n **阶单位阵**.

形如 $cI_n := \mathrm{diag}\{c, c, \cdots, c\}$ 的对角阵称为称为 **数量阵**.

注 4 一个 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 如果它的主对角线以下的元素都等于零, 即 $a_{ij}=0$, $i>j$, 则称 A 为 **上三角阵**. 如果它的主对角线以及主对角线以下的元素都等于零, 即 $a_{ij}=0$, $i\geq j$, 则称 A 为 **严格上三角阵**. 同样地, 一个 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, 如果它的主对角线以上的元素都等于零, 即 $a_{ij}=0$, $i<j$, 则称 A 为 **下三角阵**. 如果它的主对角线以及主对角线以上的元素都等于零, 即 $a_{ij}=0$, $i\leq j$, 则称 A 为 **严格下三角阵**.

注 5 一个 $1\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

称为 n **维行向量**. 一个 $n\times 1$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为 n **维列向量**.