§1.7 Laplace 定理

教学目的与要求 理解 Laplace 定理的含义，会用其解决实际问题.

行列式可按第一列 (行) 展开, 亦可按任一行 (列) 展开, 现将此结论再做推广.

取行列式 $|A|$ 中第 i_1 行, 第 i_2 行, $\cdots$, 第 i_k 行以及第 j_1 列, 第 j_2 列, $\cdots$, 第 j_k 列交点上的元素，其中 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n \quad 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$ ，按原来 $|A|$ 中相对位置构成一 k 阶行列式，称之为 $|A|$ 的一个 k 阶子式，记为

$$A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix} \tag{1}$$

在行列式 $|A|$ 中去掉第 i_1 行，第 i_2 行， $\cdots$, 第 i_k 行以及第 j_1 列，第 j_2 列， $\cdots$, 第 j_k 列以后剩下的元素按原来的相对位置构成一个 $n-k$ 阶行列式，称为 (1) 的余子式，记为

$$M\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$$

若令 $p = i_1 + i_2 + \cdots + i_k$,$q = j_1 + j_2 + \cdots + j_k$, 记

$$\widehat{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} = (-1)^{p+q} M\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}$$

称之为式 (1) 的代数余子式. 本节主要证明下述 Laplace 定理.

Laplace **定理** 设 $|A|$ 是 n 阶行列式，在 $|A|$ 中任取 k 行 (列), 那么含于 k 行 (列) 的全部 k 阶子式与它们所对应的代数余子式的乘积之和等于 $|A|$. 即若取定 k 个行 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, 则

$$|A| = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \widehat{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}. \tag{2}$$

同样，若取定 k 个列： $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$, 则

$$|A| = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \widehat{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}. \tag{3}$$

例 1 在 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix},$$

固定第二行，第三行，则具有 $C_4^2 = 6$ 个二阶子式

$$A\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4$$

$$A\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$A\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 10$$

$$A\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

相应代数余子式

$$\widehat{A}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = (-1)^{2+3+1+2}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -8$$

$$\widehat{A}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = (-1)^{2+3+1+3}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -20$$

$$\widehat{A}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = (-1)^{2+3+1+4}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\widehat{A}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = (-1)^{2+3+2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 10$$

$$\widehat{A}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = (-1)^{2+3+2+4}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\widehat{A}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = (-1)^{2+3+3+4}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

依 Laplace 定理

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \\
&= (-6)(-8) + (-1)(-20) + 10 \times 1 + 3 \times 0 = 90.
\end{aligned}
$$

为了 Laplace 定理的证明，依定义 n 阶行列式有 $n!$ 项，其中每一项在不考虑符号情形下由 n 个元素组成， $|A|$ 中每一行，每一列中有且仅有一个元素在这一项中．若固定 $|A|$ 的 k 行 (列), 则一共有 C_n^k 个不同的子式，每个子式完全展开后有 $k!$ 项．相应的余子式也有 C_n^k 个，每个余子式完全展开后有 $(n-k)!$ 项，因此在 Laplace 定理中 (2)(或 (3)) 的右端一共有 $k!(n-k)!c_n^k = n!$ 项．所以如果能证明每个 k 阶子式及其代数余子式之积中的每一项都属于 $|A|$ 的展开式，就证明了 Laplace 定理.

引理 n 阶行列式 $|A|$ 的任一 k 阶子式与其代数余子式之积的展开式中每一项都属于 $|A|$ 的展开式.

证明 首先考虑特殊情形： $i_1 = 1, i_2 = 2, \cdots, i_k = k; j_1 = 1, j_2 = 2, \cdots, j_k = k.$ 此时

$$
|A| = \begin{vmatrix} A_1 & * \\ * & A_2 \end{vmatrix}, \quad \text{其中} A_1 = A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{bmatrix} \quad A_2 = \widehat{A}\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{bmatrix}
$$

A_1 中每一项具有形式

$$
(-1)^{N(j_1, j_2, \cdots, j_k)} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_k k}.
$$

A_2 中每一项具有形式

$$
(-1)^{N(j_{k+1}, j_{k+2}, \cdots, j_n)} a_{j_{k+1} k+1} a_{j_{k+2} k+2} \cdots a_{j_n n},
$$

所以

$$
A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{bmatrix} \widehat{A}\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{bmatrix}
$$

中任一项具有下列形式：

$$
(-1)^{\sigma} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_k k} a_{j_{k+1} k+1} \cdots a_{j_n n} \tag{4}
$$

其中 $\sigma=N(j_1,j_2,\cdots,j_k)+N(j_{k+1},j_{k+2},\cdots,j_n)$. 此处 $(j_1,j_2,\cdots,j_k)$ 是 $(1,2,\cdots,k)$ 的一个排列， $(j_{k+1},j_{k+2},\cdots,j_n)$ 是 $(k+1,k+2,\cdots,n)$ 的一个排列. 故

$$N(j_1,j_2,\cdots,j_k)+N(j_{k+1},j_{k+2},\cdots,j_n)=N(j_1,j_2,\cdots,j_k,j_{k+1},j_{k+2},\cdots,j_n)$$

即 (4) 式所示为 $|A|$ 中某一项.

现在讨论一般情形. 设 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$; $1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n$. 经过 i_1-1 次相临两行互换，可把第 i_1 行调到第 1 行；同理经 i_2-2 次对换可把 i_2 行调至第 2 行， $\cdots$, 经过 $(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_k-k)=(i_1+i_2+\cdots+i_k)-\frac{1}{2}k(k+1)$ 次对换可把第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行调至前 k 行；同理，经过 $(j_1+j_2+\cdots+j_k)-\frac{1}{2}k(k+1)$ 次对换，可将第 $j_1,j_2,\cdots,j_k$ 列调至前 k 列. 因此 $|A|$ 经 $(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)-k(k+1)$ 次行，列对换，得一新行列式

$$|C|=\begin{vmatrix} D & * \\ * & B \end{vmatrix}$$

其中 $|C|=(-1)^{p+q-k(k+1)}|A|=(-1)^{p+q}|A|$,$p=i_1+i_2+\cdots+i_k$,$q=j_1+j_2+\cdots+j_k$. $|B|$ 是子式 $|D|$ 在 $|C|$ 中的余子式，(亦是代数余子式). 由前讨论过情形知：$|D||B|$ 中的任一项都是 $|C|$ 中的项，但显然由定义

$$\widehat{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}=(-1)^{p+q}|B|$$

因此

$$A\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}\widehat{A}\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix} \tag{5}$$

中的任一项都是 $(-1)^{p+q}|C|=|A|$ 的项. □

现完成 Laplace 定理的证明.

证明 只需证 (2) 式， (3) 式同理可证. 由引理可知 (5) 式中任一项均属于 $|A|$ 的展开式. 当 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 固定时，对不同的 $1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n$, 由 (5) 式展开得到的项没有重复的，且一共有 $n!$ 项， $|A|$ 的展开式中也有 $n!$ 项. 因此 (2) 式成立. □

例 2

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解 第 1,3 列有较多 0 元，在此二列上作 Laplace 展开.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+3+1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+4+1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+1+3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -132 \end{aligned}$$

例 3 求行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{k+11} & a_{k+12} & \cdots & a_{k+1k} & a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 按前 k 行展开，则有

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{k+1k+1} & \cdots & a_{k+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

练习： P_{44} 4

思考： P_{37} 2，3

挑战： P_{47} 20