§1.6 行列式的等价定义

教学目的与要求 掌握行列式的等价定义，了解其含义.

一. 逆序数：

定义 由 $1,2,\cdots,n$ 组成一个有序数组称为一个 n 级排列. 在一个 n 级排列 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数. 记为 $N(k_1,k_2,\cdots,k_n)$.

逆序数求法 1: 在 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 中，设 k_1 后有 m_1 个数比 k_1 小， k_2 后有 m_2 个数比 k_2 小； $\cdots$, k_{n-1} 后有 m_{n-1} 个数比 k_{n-1} 小，则 $N(k_1,k_2,\cdots,k_n)=m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}$.

逆序数求法 2: 在 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 中，设 n 后共有 l_n 个数比 n 小， $n-1$ 后共有 l_{n-1} 个数比 $n-1$ 小， $\cdots$, 在 2 后面有 l_2 个数比 2 小，则 $N(k_1,k_2,\cdots,k_n)=l_n+l_{n-1}+\cdots+l_2$.

例 1 (1) $N(4,1,3,2)=m_1+m_2+m_3=3+0+1=4$; $N(4,1,3,2)=l_4+l_3+l_2=3+1+0=4$;

(2) $N(1,2,\cdots,n)=0$.

(3) $N(n,n-1,\cdots,2,1)=m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$;

$N(n,n-1,\cdots,2,1)=l_n+l_{n-1}+\cdots+l_2=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\frac{n(n-1)}{2}$.

二. 奇排列，偶排列

定义 若排列 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 的逆序数为偶 (含 0) 数，则称之为偶排列；若排列 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 的逆序数为奇数，则称之为奇排列.

引理 设 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 为一个 n 个数的排列，若将其中 k_i 与 k_j 位置对换，其余保持不动，则改变排列的奇偶性.

证明 首先考虑相邻两数对换. 若 $k_i>k_{i+1}$, 则对换后，逆序数减少 1; 若 $k_i<k_{i+1}$, 则对换后，逆序数增加了 1(因 m_k 不变，当 $k\neq i,i+1$ 时), 故无论何

种情形，奇偶性均变．再考虑一般情形． k_i 与 k_j 对换可通过相邻对换实现．设 $i<j$, k_i 先与 k_{i+1} 对换，再与 k_{i+2} 对换， $\cdots$,$j-i$ 次后再将 k_j 与 k_{j-1} 对换，再与 k_{j-2} 对换，换了 $j-i-1$ 次后， k_j 到 k_i 原来位置．一共换了 $2(j-i)-1$ 次，故改变奇偶性. $\square$

引理 在 $n!$ 个不同的 n 个数的全排列中，奇排列与偶排列各占一半.

证明 设奇排列 p 个，偶排列 q 个．将每个奇排列的头两个数对换一下，则所有奇排列成了偶排列，因此 $p\le q$. 同理 $q\le p$, 故 $p=q$. $\square$

三. 向量

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个数， $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 称为由这 n 个数组成的向量．定义两向量 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$,$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$ 的加法为 $\alpha+\beta=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{pmatrix}$, 定义数 λ 与 α 的数乘为 $\lambda\alpha=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\vdots\\\lambda a_n\end{pmatrix}$. 则加法和数乘满足以下运算律：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+0=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

(8) $(kl)\alpha=k(l\alpha)$.

例 记

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ \cdots,\ e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

为 n 维标准单位列向量，则

$$ae_i=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\a\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\i\\\\\\\\\end{matrix},\quad ae_i+be_j=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\a\\\vdots\\b\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\i\\\vdots\\j\\\\\\\end{matrix}$$

从而

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}=a_{11}e_1+a_{21}e_2+\cdots+a_{n1}e_n=\sum_{i=1}^n a_{i1}e_i,\ \ \alpha_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{nj}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i.$$

四. 行列式的等价定义

§1.1 中用递推方法定义了行列式，这里将行列式表示为 $n!$ 项的和.

先引进些符号. 设 $|A|$ 为 n 阶行列式，其第 (i,j) 元素记为 a_{ij}, 行列式的第 j 列简记为 $\alpha_j, 1\leq j\leq n$. 将 $|A|$ 记为 $|\,\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n\,|$, 则

$$|A|=|\,\alpha_1\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n\,|=|\,\textstyle\sum_{i=1}^n a_{i1}e_i\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n\,|=\displaystyle\sum_{i=1}^n a_{i1}\,|\,e_i\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n\,|$$

$$|\,e_i\quad\alpha_2\quad\cdots\quad\alpha_n\,|=|\,e_i\quad\textstyle\sum_{k=1}^n a_{k2}e_k\quad\cdots\quad\alpha_n\,|=\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{k2}\,|\,e_i\quad e_k\quad\cdots\quad\alpha_n\,|$$

所以$|A|=\displaystyle\sum_{i,k}a_{i1}a_{k2}\,|\,e_i\quad e_k\quad\cdots\quad\alpha_n\,|=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n}a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}\,|\,e_{k_1}\quad e_{k_2}\quad\cdots\quad e_{k_n}\,|$

又当 $e_{k_i}=e_{k_j}$ 时, $|\,e_{k_i}\quad e_{k_j}\quad\cdots\quad e_{k_n}\,|=0$. 故不为零的行列式 $|\,e_{k_i}\quad e_{k_j}\quad\cdots\quad e_{k_n}\,|$ 必须满足条件： $k_i\neq k_j$, 即 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 为 $(1,2,\cdots,n)$ 的一个全排列或称

$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 是 $(1, 2, \cdots, n)$ 的一个置换. 此时，行列式 $|\, e_{k_1} \quad e_{k_2} \quad \cdots \quad e_{k_n} \,|$ 的值为 1 或 -1. 故 $|A|$ 的展开项共有 $n!$ 项.

计算 $|\, e_{k_1} \quad e_{k_2} \quad \cdots \quad e_{k_n} \,|$. 若 $k_i = i$, $1 \le i \le n$, 即 $(k_1, k_2, \cdots, k_n) = (1, 2, \cdots, n)$, 则该行列式为 1. 设 n 后面有 l_n 个数比 n 小. 将 n 依次与后面的相邻数对换，经过 l_n 次对换， n 到了最后末一位. 置换后的排列的逆序数与原来的差为 l_n. 对 $n-1$ 进行类似处理，经过 l_{n-1} 次对换后 $n-1$ 移到了最后第二位, 依此类推, 经过 $l_n + l_{n-1} + \cdots + l_2$ 次对换后 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 变成了 $(1, 2, \cdots, n)$, 因此

$$|\, e_{k_1} \quad e_{k_2} \quad \cdots \quad e_{k_n} \,| = (-1)^{N(e_{k_1}, e_{k_2}, \cdots, e_{k_n})}.$$

定义 设 $|A|$ 是 n 阶行列式，它的第 (i, j) 元素记为 a_{ij}. 定义 $|A|$ 的值为

$$\sum_{(k_1, k_2, \cdots, k_n)} (-1)^{N(k_1, k_2, \cdots, k_n)} a_{k_1 1} a_{k_2 2} \cdots a_{k_n n}.$$

因为 $|A| = |A'|$, 所以

$$|A| = \sum_{(l_1, l_2, \cdots, l_n)} (-1)^{N(l_1, l_2, \cdots, l_n)} a_{1 l_1} a_{2 l_2} \cdots a_{n l_n}.$$

从定义也亦能推出行列式诸性质，也能推出 §1.1 中的展开式.

思考 P_{37} 　2, 3

练习 写出 5 阶行列式中含有因子 $a_{13} a_{32}$ 的并且带正号的所有项.