§1.2-§1.4 行列式的性质

教学目的与要求 熟练理解和掌握行列式的性质，了解用归纳法证明的步骤与模式，能够利用行列式的性质计算行列式的值；熟练掌握重要公式 (性质 10); 掌握和应用 Cramer 法则.

性质 1 若 $|A|$ 是一个 n 阶行列式，且

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad 或 \quad |A|=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$(其中 a_{ii} 称为 $|A|$ 的主对角线元).

证明 (1) $|A|$ 为上三角行列式. $n=1$ 时 $|A|=a_{11}$ 结论成立. 假设结论对于 $n-1$ 阶上三角行列式成立, 考虑 n 阶行列式 $|A|$. 由定义知 $|A|=a_{11}M_{11}$. 而 M_{11} 为 $n-1$ 阶上三角行列式，依归纳假设 $M_{11}=a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$, 故而 $|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

(2) $|A|$ 为下三角行列式. 由定义，$|A|=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$. 对 $n-1$ 阶行列式 $M_{i1}, i>1$, 仍为下三角行列式，且 M_{i1} 的主对角元至少有一个为零，故由归纳假设 $M_{i1}=0, i>1$, 对 M_{11} 由归纳假设 $M_{11}=a_{22}\cdots a_{nn}$. 所以 $|A|=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. □

性质 2 若行列式 $|A|$ 的某一行或某一列元素全为零，则 $|A|$ 为零.

证明 归纳法. 当 $n=1$ 时，结论显然成立. 假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立. 先设 $|A|$ 中第 i 行元素全为零，则

$$|A|=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

其中 $M_{j1}(j\neq i)$ 中都有一行元素全为零，故由归纳假设 $M_{j1}=0$, 而 $a_{i1}=0$, 故 $a_{i1}M_{i1}=0$, 从而 $|A|=0$.

再设 $|A|$ 中第 i 列元素全为零，则若 $i=1$, 显然 $|A|=0$. 若 $i>1$, 在展开式

$$|A|=a_{11}M_{11}-a_{21}M_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}$$

中每个 M_{j1} 都有一列元素全为零. 由归纳假设 $M_{j1}=0$, 所以 $|A|=0$. □

性质 3 将行列式 $|A|$ 的某一行或某一列乘以常数 c 得到行列式 $|B|$, 则 $|B|=c|A|$.

证明 归纳法. 当 $n=1$ 时，结论显然成立.

(1) 设 $|B|$ 中第 i 行的每个元素为 $|A|$ 中第 i 行每个元素乘以 c, 而其它行元素与 $|A|$ 相同，由定义

$$|B|=a_{11}N_{11}-a_{21}N_{21}+\cdots+(-1)^{i+1}ca_{i1}N_{i1}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}$$

其中 N_{r1} 为 $|B|$ 的第 r 行第一列的余子式. 由题意及归纳假设知

$$N_{r1}=cM_{r1}, r\neq i,\ \ N_{i1}=M_{i1}$$

其中 M_{r1},M_{i1} 为 $|A|$ 相应的余子式. 由定义知 $|B|=c|A|$.

(2) 列的情形. 若 $|B|$ 的第 1 列元素都是 $|A|$ 的第 1 列元素的 c 倍，则将 $|B|$ 按定义展开即得；若 $|B|$ 的第 i 列 $(i>1)$ 元素是 $|A|$ 的第 i 列元素的 c 倍，利用展开式及归纳法即得. □

性质 4 对换行列式 $|A|$ 的任意不同的两行，则行列式的值改变符号 (绝对值不变).

证明 对 n 用归纳法. 当 $n=2$ 时, $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}=-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, 命题成立. 设结论对 $n-1$ 阶行列式成立. 对 n 阶情形.

先证特殊情形 — 对换行列式相邻两行，其值改变符号. 设 $|B|$ 由 $|A|$ 对换第 r 行和第 $r+1$ 行得到，记 N_{ij} 为 $|B|$ 的第 i 行第 j 列元素的余子式，按定义展开

$$|B|=a_{11}N_{11}-a_{21}N_{21}+\cdots+(-1)^{r+1}a_{r+1,1}N_{r1}+(-1)^{r+2}a_{r1}N_{r+1,1}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}N_{n1}.$$

若 $i\neq r,r+1$, 由归纳假设 $N_{i1}=-M_{i1}$. 而 $N_{r1}=M_{r+1,1},N_{r+1,1}=M_{r,1}$, 因此 $|B|=-|A|$.

现考虑一般情形. 不妨设 $|A|$ 的第 i 行与第 j 行对换，且 $j>i$. 先将第 i 行与第 $i+1$ 行对换，再与第 $i+2$ 行对换，一直到与第 j 行对换，然后再将第 $j-1$ 行经过不断与相邻行对换到原来的第 i 行位置，这样共对换了 $2(j-i)-1$ 次. 故仍有 $|B|=-|A|$. □

性质 5 若行列式 $|A|$ 的两行相同，则 $|A|=0$.

证明 将这两行对换可得 $|A|=-|A|$, 所以 $|A|=0$. □

性质 6 设 $|A|$,$|B|$,$|C|$ 是三个 n 阶行列式，它们的第 i 行第 j 列元素分别记为 a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, $|A|$, $|B|$, $|C|$ 的第 r 行元素适合条件：

$$c_{rj}=a_{rj}+b_{rj} \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

而其他的元素相同，即 $c_{ij}=a_{ij}=b_{ij}(i\neq r, j=1,2,\cdots,n)$, 则

$$|C|=|A|+|B|.$$

证明 对 n 用数学归纳法． $n=1$ 时，显然成立．设结论对 $n-1$ 成立,

$$|C|=a_{11}Q_{11}-a_{21}Q_{21}+\cdots+(-1)^{r+1}(a_{r1}+b_{r1})Q_{r1}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}Q_{n1}$$

其中 Q_{ij} 为 $|C|$ 的余子式. 若 $i\neq r$, 则 Q_{i1} 仍适合 (1), 由归纳假设 $Q_{i1}=M_{i1}+N_{i1}$, 其中 M_{i1},N_{i1} 分别是 $|A|$,$|B|$ 的余子式. 若 $i=r$, 则 $Q_{r1}=M_{r1}=N_{r1}$, 简单计算即知 $|C|=|A|+|B|$. □

性质 7 将行列式的一行乘以某常数 c 加到另一行上去，行列式值不变.

证明 由性质 6, 性质 3, 性质 5 即得. □

性质 5′ 若行列式 $|A|$ 的两列相同，则 $|A|=0$.

证明 若 $|A|$ 的相同两列都非第 1 列, 则将 $|A|$ 展开并且由归纳法即得 $|A|=0$. 不妨设 $|A|$ 的第 1 列与第 r 列相同. 若 $|A|$ 的第 1 列元素全为 0, 则 $|A|=0$. 故假设 $|A|$ 的第 1 列元素至少有一非零. 如 $a_{s1}\neq 0$. 对调第 1 行与第 s 行，仅改变 $|A|$ 符号，而 $-|A|=0$ 即意味着 $|A|=0$. 不妨设 $a_{11}\neq 0$,$|A|$ 形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots \\ a_{21} & \cdots & a_{21} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n1} & \cdots \end{vmatrix}$$

将 $|A|$ 的第 1 行乘以 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 加到第 i 行上去 $(i=2,3,\cdots,n)$, 得一新行列式 $|C|$, 形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots \\ 0 & * & 0 & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & * & 0 & * \end{vmatrix}$$

由性质 7, $|C|=|A|$. 将 $|C|$ 按定义展开，$|C|=a_{11}Q_{11}$, 而 Q_{11} 是一个有一列全为 0 的 $n-1$ 阶行列式. 由性质 2,$Q_{11}=0$, 即有 $|C|=0,\therefore |A|=0$. □

性质 6′ $|A|$,$|B|$,$|C|$ 是三个 n 阶行列式，$|C|$ 的第 r 列元素等于 $|A|$ 的第 r 列元素与 $|B|$ 的第 r 列元素之和：

$$c_{ir}=a_{ir}+b_{ir} \qquad\qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

当 $j\neq r$ 时，$c_{ij}=a_{ij}=b_{ij}$, 则 $|C|=|A|+|B|$.

证明 若 $r=1$, 由定义展开 $|C|$ 即得. 若 $r>1$, 则 $|C|$ 展开为

$$|C|=a_{11}Q_{11}-a_{21}Q_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}Q_{n1}.$$

每个 Q_{i1} 由归纳假设得：

$$Q_{i1}=M_{i1}+N_{i1}$$

其中 Q_{i1},M_{i1},N_{i1} 分别是 $|C|$,$|A|$,$|B|$ 的余子式，代入可得 $|C|=|A|+|B|$. □

性质 7′ 将行列式的一列乘以常数 c 加到另一列上，行列式值不变.

证明 利用性质 6′, 性质 3 及性质 5′ 得证. □

性质 4′ 交换行列式的两列，行列式值改变符号.

证明 法一：若交换的两列不是第一列，由归纳法即得.

若第 1 列与第 s 列交换后的行列式为 $|B|$, 则

$$\begin{aligned}|B| &= \begin{vmatrix} a_{1s} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2s} & \cdots & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ns} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1s}-a_{11} & \cdots & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2s}-a_{21} & \cdots & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ns}-a_{n1} & \cdots & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{1s}-a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2s}-a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ns}-a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -|A|\end{aligned}$$

$\square$

法二：设 $|B|$ 由 $|A|$ 交换第 r 列及第 s 列后得到，即

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

令

$$\begin{aligned}
|C| &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r}+a_{1s} & \cdots & a_{1r}+a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r}+a_{2s} & \cdots & a_{2r}+a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr}+a_{ns} & \cdots & a_{nr}+a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1r}+a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2r}+a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nr}+a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1r}+a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2r}+a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nr}+a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= |A| + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\quad +|B| + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1s} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2s} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

除 $|A|$,$|B|$ 外的两行列式均有两列相同，行列式为 0, $|C|$ 的第 r 列与第 s 列相同，故 $|C|$ 为 0. 这样有 $|C| = |A| + |B| = 0$, 即 $|A| = -|B|$. $\square$

性质 8 (行列式按第 r 列的展开)

$$|A| = a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \cdots + a_{nr}A_{nr}$$

其中 A_{ir} 为 $|A|$ 的代数余子式.

证明 依次对换第 r 列和第 $r-1$ 列，再对换 $r-1$ 列和 $r-2$ 列，$\cdots$, 最后对换第 2 列和第 1 列，经过这 $r-1$ 次互换后，将原行列中第 r 列换至第 1 列，得到行列式 $|B|$,

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{1r} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2r} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nr} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} (-1)^{r-1}|A| = |B| &= a_{1r}N_{11} - a_{2r}N_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{nr}N_{n1} \\ &= a_{1r}M_{1r} - a_{2r}M_{2r} + \cdots + (-1)^{n+r}a_{nr}M_{nr} \end{aligned}$$

故 $|A| = (-1)^{1+r}a_{1r}M_{1r} + (-1)^{2+r}a_{2r}M_{2r} + \cdots + (-1)^{n+r}a_{nr}M_{nr} = a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \cdots + a_{nr}A_{nr}$, 上面的 N_{i1}, M_{ir} 分别表示 $|B|$ 及 $|A|$ 的余子式. □

引理 1

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s-1} & a_{2s} & a_{2s+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ns-1} & a_{ns} & a_{ns+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1s}A_{1s}.$$

证明 $|A|$ 按第 s 列展开， $|A| = a_{1s}A_{1s} + a_{2s}A_{2s} + \cdots + a_{ns}A_{ns}$, 而 $A_{is}(i>1)$ 都有一列全为 0, 故全为 0. 所以 $|A| = a_{1s}A_{1s}$. □

引理 2 若 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 则 $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$.

证明 由性质 $6'$ 及引理 1,

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \end{aligned}$$

□

性质 8' $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$.

证明 由引理 2 及性质 4, 由类似证明性质 8 的方法即得. $\square$

定义 设 $|A|$ 是上述行列式，令 $|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. 则 $|A'|$ 称为 $|A|$ 的转置.

性质 9 行列式转置后值不变，即 $|A'| = |A|$.

证明 对行列式阶用归纳法. 当 $n = 1$ 显然成立. 设 M_{ij},N_{ij} 分别为 $|A|$ 及 $|A'|$ 的余子式. 则 N_{ij} 等于 M_{ji} 的转置. 由归纳假设 $N_{ij} = M_{ji}$, 将 $|A'|$ 按第 1 行展开

$$|A'| = a_{11}N_{11} - a_{21}N_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}N_{1n}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} = |A|. \ \square$$

性质 10 设 $|A|$ 是 n 阶行列式，第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij}, 则对任意的 $r, 1 \leq r \leq n$, 有展开式：

$$a_{1r}A_{1r} + a_{2r}A_{2r} + \cdots + a_{nr}A_{nr} = |A|;$$

$$a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + \cdots + a_{nr}A_{ns} = 0; s \neq r;$$

$$a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \cdots + a_{rn}A_{rn} = |A|;$$

$$a_{r1}A_{s1} + a_{r2}A_{s2} + \cdots + a_{rn}A_{sn} = 0; s \neq r.$$

证明 只需证明第二个结论. 基于 $|A|$ 造一新行列式

$$|B| = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & r\text{列} & & s\text{列} & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nr} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} = 0$$

将 $|B|$ 按第 s 列展开，即有 $a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + \cdots + a_{nr}A_{ns} = 0$. $\square$

最后介绍 Cramer 法则.

考虑 n 元线性方程组

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right. \tag{2}$$

设其系数组成的行列式 $|A|$ 为

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若方程组有解 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$, 取第 1 列的代数余子式 $A_{11},A_{21},\cdots,A_{n1}$, 将 A_{11} 乘以 (1) 的第 1 式, A_{21} 乘以 (1) 的第 2 式, $\cdots$, A_{n1} 乘以 (1) 的第 n 式，得

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}A_{11}\xi_1+a_{12}A_{11}\xi_2+\cdots+a_{1n}A_{11}\xi_n=b_1A_{11} \\ a_{21}A_{21}\xi_1+a_{22}A_{21}\xi_2+\cdots+a_{2n}A_{21}\xi_n=b_2A_{21} \\ \cdots \\ a_{n1}A_{n1}\xi_1+a_{n2}A_{n1}\xi_2+\cdots+a_{nn}A_{n1}\xi_n=b_nA_{n1} \end{array}\right. \tag{3}$$

把上面的方程式相加得 $(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1})\xi_1+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+\cdots+a_{n2}A_{n1})\xi_2+\cdots+(a_{1n}A_{11}+a_{2n}A_{21}+\cdots+a_{nn}A_{n1})\xi_n=b_1A_{11}+b_2A_{21}+\cdots+b_nA_{n1}$. 由性质 10 知上式为

$$|A|\xi_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

记上面的右式为 A_1. 若 $|A|\neq 0$,则$\xi_1=\frac{A_1}{|A|}$. 类似地可以得到 $\xi_j=\frac{A_j}{|A|}$, $2\leq j\leq n$, 其中 A_j 是一个 n 阶行列式，它由 $|A|$ 去掉第 j 列换成由方程组常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 组成的列得到.

定理 (Cramer **法则**) 设有 n 元线性方程组

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{array}\right.$$

若这个方程组的系数行列式 $|A|$ 的值不等于 0, 则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{A_1}{|A|},\ x_2 = \frac{A_2}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{A_n}{|A|} \qquad (*)$$

其中 A_j 是一个 n 阶行列式, 它由 $|A|$ 去掉第 j 列换成由方程组常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 组成的列得到.

注 定理含三个结论，当 $|A| \neq 0$ 时， (1) 方程组有解； (2) 解唯一； (3) 解可由 (*) 表示.

证明 将 (*) 代入 (2), 利用性质 10 得

$$\begin{aligned}
& a_{11}\tfrac{A_1}{|A|} + a_{12}\tfrac{A_2}{|A|} + \cdots + a_{1n}\tfrac{A_n}{|A|} \\
= \ & \tfrac{1}{|A|}(a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + \cdots + a_{1n}A_n) \\
= \ & \tfrac{1}{|A|}[a_{11}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}) + a_{12}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2}) \\
& + \cdots + a_{1n}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn})] \\
= \ & \tfrac{1}{|A|}[b_1(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}) + b_2(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \cdots + a_{1n}A_{2n}) \\
& + \cdots + b_n(a_{11}A_{n1} + a_{12}A_{n2} + \cdots + a_{1n}A_{nn})] \\
= \ & \tfrac{1}{|A|}b_1|A| = b_1.
\end{aligned}$$

类似可得， $x_i = \frac{A_i}{|A|}, 1 \leq i \leq n$, 是原方程组的解，并且是唯一解. □

练习：

P_{11} 1(1), 3(1), 5(1);

P_{22} 1(1), 4(1);

P_{25} 3, 4;

P_{45} (复习题) 1

思考题： P_{45} $4-10$

选做题：已知 $|A| = \begin{vmatrix} 27 & 30 & 45 \\ -20 & -30 & 97 \\ -47 & 30 & 100 \end{vmatrix}$, 试求 $M_{11} + M_{21} + M_{31}$ 的值.