

第一章 行列式

§1.1 行列式的定义

教学目的与要求 熟练理解和掌握按第一列展开的行列式定义, 掌握余子式, 代数余子式的定义.

记

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

由 n 行 n 列共 n^2 个元素组成, 称为 n 阶行列式. 记 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式.

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

用归纳法定义 $|A|$ 的值.

定义 当 $n = 1$ 时, (1) 式的值定义为 $|A| = a_{11}$. 现假定对 $n - 1$ 阶行列式已经定义了它们的值. 则对于 n 阶行列式 $|A|$ 来说, $M_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ 已经定义. 我们定义 n 阶行列式 $|A|$ 的值为

$$|A| = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} \quad (2)$$

注 一阶行列式无余子式. (2) 式也称为 $|A|$ 按第 1 列展开式. 在行列式 $|A|$ 中, a_{ij} 的代数余子式定义为

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

其中 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式, 则 (2) 可改写为

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1}$$

例

$$(1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

(3) 计算设 $|A|$ 是 3 阶行列式. 计算 $M_{11} + M_{21} + M_{31}$, 其中 M_{ij} 是 $|A|$ 的第 i 行第 j 列元素的余子式.

$$\text{解 } M_{11} + M_{21} + M_{31} = 1A_{11} + (-1)A_{21} + 1A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ -1 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ = a_{22}a_{33} - a_{13}a_{32} + a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} + a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}.$$

练习: P_7 6