§3.10 线性方程组的解

教学目的和要求 理解并掌握非齐次线性方程组解的存在性，唯一性和解的形式的判别方法，掌握齐次线性方程组的解空间以及非齐次线性方程组解的结构. 掌握用齐次线性方程组的解空间刻画矩阵的秩以及应用于证明一些关于矩阵的秩的命题.

我们考虑 n 个未知数 m 个方程式构成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

记它的系数矩阵为 A, $\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, 则 $(*)$ 可表为

$$AX = \beta,$$

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $\widetilde{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta)$. 则 $(*)$ 可表为

$$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 \cdots + a_n\alpha_n,$$

易知， $(*)$ 可表为

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = L(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta).$$

矩阵 $\widetilde{A} = (A, \beta)$, 称为 $(*)$ 的增广矩阵.

定理 1 在线性方程组 $(*)$ 中,

(1) 若 $r(\widetilde{A}) \neq r(A)$, 则方程组无解;

(2) 若若 $r(\widetilde{A}) = r(A) = n$, 则方程组只有唯一解;

(3) $r(\widetilde{A}) = r(A) < n$, 则方程组有无穷多个解.

证明 线性方程组 $(*)$ 有解的充分必要条件是 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示，充分必要条件是 $r(\widetilde{A}) = r(A)$.

当 $r(\widetilde{A}) = r(A) = n$ 时，有 $m \geq n$. 适当交换方程式次序，可设 $\widetilde{A}$ 的前 n 个行向量线性无关，其余行向量是前 n 个行向量的线性组合，因而后 $m-n$ 行是多余的. 因而得到一个 n 个未知数 n 个方程组成的线性方程组，其系数矩阵满秩，由 Cramer 法则知存在唯一解.

当 $r(\widetilde{A}) = r(A) = r < n$. 可经过调整次序并消去多余方程式后可得到与原方程组同解的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r + a_{1r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

因为 $r(A) = r$, 所以上式总有一个 r 阶子式不为 0, 不妨设 $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$, 我们得到一个有 $n-r$ 个参数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - a_{rn}x_n \end{cases} \qquad (**)$$

任取 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 的一个值, 方程 $(**)$ 有唯一解, 故方程组 $(*)$ 有无穷多个解. $\square$

定义 线性方程组 $(*)$ 称为 **齐次** 的, 若所有常数项 b_i 都为 0. 否则称为 **非齐次** 的线性方程组. 并称 $AX = 0$ 是与 $AX = \beta$ 相伴的齐次线性方程组.

考虑齐次线性方程组 $AX = 0$. 因为 $r(\widetilde{A}) = r(A)$, 所以总有解 $x_1 = \cdots = x_n = 0$, 当 $r(A) = n$ 时，有唯一解；当 $r(A) < n$ 时有无穷多解.

定理 2 设有齐次线性方程组 $AX = 0$, 其中 A 是 $m \times n$ 阶矩阵. 若 $r(A) = r < n$, 则方程组的解全体构成 K^n 的一个 $n-r$ 维子空间.

证明 记 $AX = 0$ 的解集合为 W. 因为 $0 \in W$, 所以 W 非空. 对任意 $X, Y \in W$, 则 $AX = 0$, $AY = 0$, 所以 $A(X+Y) = AX + AY = 0$, 故 $X + Y \in W$. 对任意 $X \in W$, $a \in K$, $AaX = aAX = 0$, 所以 $aX \in W$, 所以 W 是 K^n 的子空间.

设 $r(A)=r<n$, 故 $AX=0$ 可化为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1r}x_r=-a_{1r+1}x_{r+1}-\cdots-a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+\cdots+a_{rr}x_r=-a_{rr+1}x_{r+1}-\cdots-a_{rn}x_n \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1=c_{1r+1}x_{r+1}+\cdots+c_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_r=c_{rr+1}x_{r+1}+\cdots+c_{rn}x_n \end{cases}$$

其中 $x_{r+1},\cdots,x_n$ 可取任何数，依次取

$$\begin{cases} x_{r+1}=1,x_{r+2}=0,\cdots,x_n=0 \\ x_{r+1}=0,x_{r+2}=1,\cdots,x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{r+1}=0,x_{r+2}=0,\cdots,x_n=1 \end{cases}$$

得到个 $n-r$ 解:

$$\eta_1=\begin{pmatrix} c_{1r+1} \\ \vdots \\ c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \eta_2=\begin{pmatrix} c_{1r+2} \\ \vdots \\ c_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ \eta_{n-r}=\begin{pmatrix} c_{1n} \\ \vdots \\ c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

不难看出 η_1,η_2,η_{n-r} 线性无关. 设 η 是 $AX=0$ 的任一解，设 $\eta=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, 则 η 必须满足

$$\begin{cases} a_1=c_{1r+1}a_{r+1}+\cdots+c_{1n}a_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_r=c_{rr+1}a_{r+1}+\cdots+c_{rn}a_n \end{cases}$$

于是 $\eta=a_{r+1}\eta_1+a_{r+2}\eta_2+\cdots+a_n\eta_{n-r}$, 所以 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 是 W 的一组基. 因而 $\dim W=n-r$. □

注 称 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$ 为齐次线性方程组 $AX=0$ 的 **基础解系**.

推论 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $r(A)=r$ 的充分必要条件是 $AX=0$ 的解空间的维数 $n-r$.

定理 3 设 A 是 $m\times n$ 矩阵， $AX=\beta$ 是线性方程组， $r(\widetilde{A})=r(A)=r<n$. 设 $AX=0$ 有基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$, 又 γ 是 $AX=\beta$ 的一个特解，则 $AX=\beta$ 的解全体为

$$a_1\eta_1+a_2\eta_2+\cdots+a_{n-r}\eta_{n-r}+\gamma,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-r}$ 可取任意数.

证明 设 γ 是 $AX=\beta$ 的解， α 是 $AX=0$ 的解，则 $\alpha+\gamma$ 是 $AX=\beta$ 的解，所以 $a_1\eta_1+a_2\eta_2+\cdots+a_{n-r}\eta_{n-r}+\gamma$ 是 $AX=\beta$ 的解.

设 γ 是 $AX=\beta$ 的一个固定解，对 $AX=\beta$ 的任意解 ξ, $A\xi=\beta=A\gamma, A(\xi-\gamma)=0$, 所以 $\xi-\gamma=a_1\eta_1+a_2\eta_2+\cdots+a_{n-r}\eta_{n-r}$, 所以 $\xi=a_1\eta_1+a_2\eta_2+\cdots+a_{n-r}\eta_{n-r}+\gamma$. □

例 1

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3+4x_4+x_5=7\\ 2x_1+6x_2+5x_4+2x_5=5\\ 4x_1+11x_2+8x_3+5x_5=3\\ x_1+3x_2+2x_3+x_4+x_5=-2\end{cases}$$

解 $\begin{pmatrix}1&3&-2&4&1&7\\2&6&0&5&2&5\\4&11&8&0&5&3\\1&3&2&1&1&-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&3&-2&4&1&7\\0&0&4&-3&0&-9\\0&-1&16&-16&1&-25\\0&0&4&-3&0&-9\end{pmatrix}\longrightarrow$

$\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&3&-2&4&1&7\\0&1&-16&16&-1&25\\0&0&4&-3&0&-9\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{19}{2}&4&\frac{71}{2}\\0&1&0&4&-1&-11\\0&0&1&-\frac{3}{4}&0&-\frac{9}{4}\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$,

所以 $AX=\beta$ 有特解 $\gamma=\begin{pmatrix}\frac{71}{2}\\-11\\-\frac{9}{4}\\0\\0\end{pmatrix}$, 且 $AX=0$ 有基础解系 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{19}{2}\\-4\\\frac{3}{4}\\1\\0\end{pmatrix}$, $\eta_2=$

$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 所以原方程组的全部解为 $\gamma + a_1\eta_1 + a_2\eta_2$, 其中 $a_1, a_2 \in K$.

例 2 设 $A_{m\times n}, B_{n\times s}$ 满足 $AB = 0$, 则 $r(A) + r(B) \le n$.

证明 记 $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$, 则 $AB = 0$ 的充分必要条件是 $A\beta_i = 0$, $1 \le i \le n$. 所以 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 是 $AX = 0$ 的解，因而 $r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) \le n - r(A)$. 故 $r(A) + r(B) \le n$.

例 3 设 $A_{m\times n}$ 是实矩阵. 求证： $r(A'A) = r(A) = r(AA')$.

证明 我们证明 $AX = 0$ 与 $A'AX = 0$ 同解，则有 $r(A'A) = r(A)$. 事实上，$AX = 0$ 的解显然是 $A'AX = 0$ 的解. 设 X 是 $A'AX = 0$ 的解, 则有 $X'A'AX = 0$. 令 $AX = Y$, $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$, 则有 $Y'Y = 0$, 即 $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$. 因为 $y_i \in \mathbb{R}$, 所以 $y_i = 0, 1 \le i \le n$, 即 $Y = 0$, 也就是 $AX = 0$. 所以 $AX = 0$ 的解也是 $AX = 0$ 的解，因而 $AX = 0$ 与 $A'AX = 0$ 同解. 故有 $r(A'A) = r(A)$.

同理， $A'X = 0$ 与 $AA'X = 0$ 同解，故 $r(AA') = r(A') = r(A)$. □

例 4 设 $A_{m\times n}$, $B_{n\times l}$. 求证： $ABX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解的充分必要条件是 $r(AB) = r(B)$.

证明 设 V_1 是 $ABX = 0$ 的解空间，V_2 是 $BX = 0$ 的解空间, 则显然 $V_2 \subseteq V_1$, $\mathrm{dim}V_2 = l - r(B)$, $\mathrm{dim}V_1 = l - r(AB)$, 所以 $r(AB) = r(B) \Leftrightarrow \mathrm{dim}V_2 = \mathrm{dim}V_1 \Leftrightarrow V_1 = V_2 \Leftrightarrow ABX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解. □

例 5 设 $A_{n\times n}$, 则 $r(A^\star) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$

作业： P_{153} 2(2), 4(2), 7, P_{154} 9, 11.

补充题：设线性方程组

试讨论 a, b 分别取何值时，方程组有解，有唯一解，有无穷多个解，并在有解时求出所有解.

选作题： P_{154} 8

思考题： P_{153} 3，5，6， P_{154} 10.