§3.9 子空间

教学目的和要求 掌握子空间的交，和运算的概念，掌握生成子空间的元素的表示方法，了解由子集 S 生成的子空间 $L(S)$ 是包含 S 的子空间的最小子空间，熟练掌握子空间的和是直和的等价刻划，熟练掌握证明子空间的方法，证明空间作直和分解的方法，理解维数公式证明中扩基的方法，了解子空间的并不是运算的原因，了解有 ” 有限个真子空间不能覆盖整个空间 ”.

一. 子空间

定义 设 V 是数域 K 上的线性空间， V_0 是 V 的非空子集且 V_0 对加法，数乘封闭. 则称 V_0 是 V 的线性子空间，简称子空间.

注 (1) 定义中 V_0 是 K 上线性空间;

(2) 任意非零线性空间 V 都有两个平凡子空间：零空间 0 与 V 本身;

(3) 设 V_0 是 n 维线性空间 V 的非平凡子空间，则 $0 < \dim V_0 < \dim V$.

例 1 (1) $\mathbb{R}^3$ 中，通过原点的平面是二维子空间，通过原点的直线是一维子空间;

(2) K 上的所有 n 阶对称矩阵构成的集合 V 是 $K^{n\times n}$ 的子空间;

(3) 所有 n 阶反对称矩阵构成的集合 U 是 $K^{n\times n}$ 的子空间.

例 2 设 V_1, V_2 是 V 的子空间，则 $V_1 \cap V_2$ 是 V 的子空间，称为 V_1 与 V_2 的 **交空间**.

注 设 V_1, V_2 是 V 的子空间， $V_1 \not\subseteq V_2, V_2 \not\subseteq V_1$, 则 $V_1 \cup V_2$ 不是子空间. 事实上，取 $\alpha \in V_1 \setminus V_2, \beta \in V_2 \setminus V_1$, 则 $\alpha + \beta \notin V_1 \cup V_2$.

例 3 设 V_1, V_2 是 V 的子空间，则 $V_1 + V_2 = \{\alpha + \beta | \alpha \in V_1, \beta \in V_2\}$ 是 V 的子空间，简称 **和空间**.

例 4 设 S 是线性空间 V 的子集,

$$L(S) := \{a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m \mid m \in \mathbb{N}, \alpha_i \in S, a_i \in K, 1 \leq i \leq m\}$$

是 V 的子空间, 称为 **由 S 生成的子空间**. 特别地, 当 $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$, $L(S)=\{a_1\alpha_1+\cdots+a_m\alpha_m|a_i\in K,1\le i\le m\}$.

例 5 (1) α 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示的充分必要条件是 $\alpha\in L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$.

(2) 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$ 是 V 的一个基，则 $L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)=V$.

定理 1 设 S 是 V 的非空子集,

(1) $L(S)$ 是 V 的子空间，设 V_0 是包含 S 的子空间，则 $L(S)\subseteq V_0$, 因此 $L(S)=\cap_{i\in I}V_i$, 其中 $V_i,i\in I$ 是 V 的包含 S 的所有子空间.

(2) 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m$ 是 S 中极大线性无关组，则 $L(S)=L(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)$, 且 $\dim L(S)=m$.

例 6 设 V_1,V_2 是 V 的子空间，则 $L(V_1\cup V_2)=V_1+V_2$.

证明 对任意的 $\alpha\in L(V_1\cup V_2)$, 则 $\alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_s\alpha_s+b_1\beta_1+\cdots+b_t\beta_t,a_i,b_j\in K,\alpha_i\in V_1,\beta_j\in V_2$, 所以 $\alpha\in V_1+V_2$, 所以 $L(V_1\cup V_2)\subseteq V_1+V_2$.

反之，设 $\alpha\in V_1+V_2$, 存在 $\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2$ 使得 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in L(V_1\cup V_2)$. □

二. 维数公式

定理 2 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的有限维子空间，则

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2.$$

证明 设 $\dim(V_1\cap V_2)=m$, $\dim V_1=m+r$, $\dim V_2=m+t$. 取定 $V_1\cap V_2$ 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 扩为 V_1 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_s$, 扩为 V_2 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\gamma_1,\cdots,\gamma_t$, 下面证明 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_t$ 是 V_1+V_2 的基. 事实上，对于任意的 $\alpha+\beta$, 其中 $\alpha\in V_1$, $\beta\in V_2$, 则因为 α 可以表为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_s$ 的线性组合， β 可以表为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\gamma_1,\cdots,\gamma_t$ 的线性组合，所以 $\alpha+\beta$ 可以表为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_t$ 的线性组合. 另一方面，设

$$a_1\alpha_1+\cdots+a_m\alpha_m+b_1\beta_1+\cdots+b_s\beta_s+c_1\gamma_1+\cdots+c_t\gamma_t=0, \qquad (*)$$

则 $a_1\alpha_1+\cdots+a_m\alpha_m+b_1\beta_1+\cdots+b_s\beta_s=-c_1\gamma_1-\cdots-c_t\gamma_t\in V_1\cap V_2$. 所以存在 $d_1,\cdots,d_m$, 使得 $-c_1\gamma_1-\cdots-c_t\gamma_t=d_1\alpha_1+\cdots+d_m\alpha_m$. 因为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\gamma_1,\cdots,\gamma_t$ 是 V_2 的基，所以 $c_i=0$, $1\le i\le t$, $d_j=0$, $1\le j\le m$. 这样，由 (*) 式，知

$a_1\alpha_1+\cdots+a_m\alpha_m+b_1\beta_1+\cdots+b_s\beta_s=0$. 由于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_s$ 是 V_1 的基，所以 $a_i=0,\,1\le i\le m,\,b_j=0,\,1\le j\le s$. 这样， $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_s,\gamma_1,\cdots,\gamma_t$, 因而是 V_1+V_2 的基. □

三. 子空间的直和.

定义 设 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 是线性空间 V 的子空间，对 $1\le i\le m$ 均有

$$V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_m)=0$$

则称和 $V_1+V_2+\cdots+V_m$ 为 **直和**, 记为 $V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_m$.

定理 3 设 V_1,V_2 是有限维空间 V 的子空间，则下列命题等价：

(1) $V_1+V_2=V_1\oplus V_2$, 即 $V_1\cap V_2=0$;

(2) 设 $V_0=V_1+V_2$, 则 V_0 中零元素表示法唯一，即 $0=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_i\in V_i$, 则 $\alpha_1=0,\alpha_2=0$;

(3) 设 $V_0=V_1+V_2$, 则 V_0 中元素表为 V_1,V_2 中元素之和时，表示法唯一，即 $\alpha\in V_0,\alpha=\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2,\alpha_i\in V_1,\beta_i\in V_2$, 则 $\alpha_1=\alpha_2,\beta_1=\beta_2$;

(4) V_1 的基 $\xi_1,\cdots,\xi_s$ 与 V_2 的基 $\eta_1,\cdots,\eta_t$ 凑成 V_1+V_2 的基 $\xi_1,\cdots,\xi_s,\eta_1,\cdots,\eta_t$;

(5) $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) : $0=\alpha_1+\alpha_2$, 所以 $\alpha_1=-\alpha_2\in V_1\cap V_2=0$, 所以 $\alpha_1=0,\alpha_2=0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : $\alpha=\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2$, 则 $(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1-\beta_2)=0$.

(3) $\Rightarrow$ (4) : $\alpha\in V_1+V_2$, 存在 $\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2,\alpha_1\in L(\xi_1,\cdots,\xi_s)$, $\alpha_2\in L(\eta_1,\cdots,\eta_t)$, 所以 $\alpha\in L(\xi_1,\cdots,\xi_s,\eta_1,\cdots,\eta_t)$, 即 V_1+V_2 中任意向量可由 $\xi_1,\cdots,\xi_s$, $\eta_1,\cdots,\eta_t$ 线性表示.

另一方面，设 $a_1\xi_1+\cdots+a_s\xi_s+b_1\eta_1+\cdots+b_t\eta_t=0$, 则 $a_1\xi_1+\cdots+a_s\xi_s\in V_1$, $b_1\eta_1+\cdots+b_t\eta_t\in V_2$. 根据 (3), 有 $a_1\xi_1+\cdots+a_s\xi_s=0$, $b_1\eta_1+\cdots+b_t\eta_t=0$, 所以 $a_i=0,\,1\le i\le s,\,b_j=0,\,1\le j\le t$. 所以 $\xi_1,\cdots,\xi_s,\eta_1,\cdots,\eta_t$ 线性无关.

(4) $\Rightarrow$ (5) : 显然.

(5) $\Rightarrow$ (1) : 根据维数公式. □

例 7 设 K 上所有 n 阶对称矩阵全体构成空间为 V, 所有 n 阶反对称矩阵构成空间为 U, 求证： $K^{n\times n}=V\oplus U$ 并求 $\dim V,\dim U$.

证明 对任意 $A\in K^{n\times n}, A=\frac{A+A'}{2}+\frac{A-A'}{2}, \frac{A+A'}{2}\in V, \frac{A-A'}{2}\in U$, 所以 $K^{n\times n}=V+U$.

另一方面，设 $A\in V\cap U$, 则 $A'=A, A'=-A, A=-A, A=0$, 即 $V\cap U=0$, 所以 $K^{n\times n}=V\oplus U$.

V 有基 $E_{ij}+E_{ji}, 1\le i\le j\le n$, 所以 $\mathrm{dim}V=\frac{(n+1)n}{2}$, U 有基 $E_{ij}-E_{ji}, 1\le i<j\le n$, 所以 $\mathrm{dim}U=\frac{(n-1)n}{2}, \mathrm{dim}V+\mathrm{dim}U=\frac{(n+1)n}{2}+\frac{(n-1)n}{2}=n^2=\mathrm{dim}K^{n\times n}$. □

例 8 设 $V=U\oplus W, U=U_1\oplus U_2$, 则 $V=U_1\oplus U_2\oplus W$.

证明一 设 $\xi_1,\cdots,\xi_r$ 是 U_1 的基，$\eta_1,\cdots,\eta_s$ 是 U_2 的基，$\zeta_1,\cdots,\zeta_t$ 是 W 的基，因为 $U=U_1\oplus U_2$, 所以 $\xi_1,\cdots,\xi_r,\eta_1,\cdots,\eta_s$ 是 U 的基，又因为 $V=U\oplus W$, 所以 $\xi_1,\cdots,\xi_r,\eta_1,\cdots,\eta_s,\zeta_1,\cdots,\zeta_t$ 是 V 的基，所以 $V=U_1\oplus U_2\oplus W$.

证明二 对任意的 $\alpha\in V$, 因为 $V=U\oplus W$, 所以存在 $\beta\in U,\gamma\in W$, 使得 $\alpha=\beta+\gamma$, 又因为 $U=U_1\oplus U_2$, 所以存在 $\beta_i\in U_i, 1\le i\le 2$, 使 $\beta=\beta_1+\beta_2$, 所以 $\alpha=\beta_1+\beta_2+\gamma$, 所以 $V=U_1+U_2+W$.

另一方面，由 0 的表示方法唯一 (由 $\alpha\in V$ 中表示方法唯一；由 $\mathrm{dim}V=\mathrm{dim}U+\mathrm{dim}W=\mathrm{dim}U_1+\mathrm{dim}U_2+\mathrm{dim}W$) 均可得到 $V=U_1\oplus U_2\oplus W$. □

思考题 (1) 写出 m 个子空间的和是直和的等价条件.

(2) 设 $V_1,V_2,\cdots,V_m$ 是线性空间 V 的有限维子空间，求证： $\mathrm{dim}(V_1+\cdots+V_m)+\Sigma_{i=2}^m\mathrm{dim}(V_i\cap\Sigma_{j=1}^{i-1}V_j)=\Sigma_{i=1}^m\mathrm{dim}V_i$.

作业：

P_{144} 4, 10 ，　　P_{155}, 2, 4, 9

补充题. (1) 设 $A\in K^{n\times n}$, 求证： $V=\{B\in K^{n\times n}|BA=AB\}$ 构成 $K^{n\times n}$ 的子空间.

(2) 在 (1) 中令 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, 求 V 的基与维数.

挑战题： $P_{144}, 12$

思考题： P_{143}, 1, P_{144}, 2, 3, 5, 8, 9, P_{155}, 1, 4