§3.8 基变换与过渡矩阵

教学目的和要求：掌握过渡矩阵的概念及有关性质.

设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 K 上线性空间 V 的一个基，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是另一个基,

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n \\ \eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ \eta_n = a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n. \end{cases} \qquad (*)$$

将 $*$ 形式地记为

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n) = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (**),$$

则矩阵

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为从基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 到 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的 **过渡矩阵**.

注 $(*)$ 中 a_{ij} 是唯一确定的，所以过渡矩阵是唯一确定的.

下面考虑同一向量在不同基下的坐标.

设

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n) = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A,$$

$$\alpha = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

则 $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$=b_1(a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+\cdots+a_{1n}\xi_n)+b_2(a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+\cdots+a_{2n}\xi_n)+\cdots+b_n(a_{n1}\xi_1+a_{n2}\xi_2+\cdots+a_{nn}\xi_n)$

$=\xi_1(b_1a_{11}+b_2a_{21}+\cdots+b_na_{n1})+\xi_2(b_1a_{12}+b_2a_{22}+\cdots+b_na_{n2})+\cdots+\xi_n(b_1a_{1n}+b_2a_{2n}+\cdots+b_na_{nn})$

$$=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} b_1a_{11}+b_2a_{21}+\cdots+b_na_{n1} \\ b_1a_{12}+b_2a_{22}+\cdots+b_na_{n2} \\ \cdots\cdots \\ b_1a_{1n}+b_2a_{2n}+\cdots+b_na_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

所以我们得到 α 在两个不同基下的坐标有关系

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

命题 1 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 n 维线性空间 V 的基且

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)B,$$

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A,$$

则 $B=A^{-1}$.

证明 记 $B=(B_1,B_2,\cdots,B_n), B_i\in K^{n\times 1}$, 由上面的讨论知道

$$\xi_i=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)B_i=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)AB_i,$$

所以

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)(AB_1,AB_2,\cdots,AB_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)AB,$$

故有 $AB=I$, 所以 $B=A^{-1}$. □

命题 2 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 n 维空间 V 的一个基， $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 和 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$ 是另一个基，且

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A,$$

$$(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)B,$$

则

$$(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)AB.$$

证明 直接验证. □

定理 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 n 维空间 V 的向量组，且

$$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)A.$$

(1) 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的一个基，则 A 可逆;

(2) 若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的一个基， A 可逆，则 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 V 的一个基;

(3) 若 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 V 的一个基， A 可逆，则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V 的一个基.

证明 (2) 由已知得 $\dim V=n$, 且 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 线性无关，可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性表示，则 V 的任意向量均可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性表示，所以 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 V 的基.

(3)$(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)A^{-1}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, 由 (2) 即得. □

例 1 在 $K^{3\times 1}$ 中，已知 $\xi_1=(1,0,-1)',\xi_2=(2,1,1)',\xi_3=(1,1,1)'$; $\eta_1=(0,1,1)',\eta_2=(-1,1,0)',\eta_3=(1,2,1)'$.

(1) 求证： ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $K^{3\times 1}$ 的基， η_1,η_2,η_3 是 $K^{3\times 1}$ 的基.

(2) 求从基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 到 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵.

证明 (1) ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关 $\Leftrightarrow (\xi_1,\xi_2,\xi_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0$ 只有零解

$$\Leftrightarrow |\xi_1,\xi_2,\xi_3|\neq 0,$$

$|\xi_1,\xi_2,\xi_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, 所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $K^{3\times 1}$ 的基.

同理可证, η_1,η_2,η_3 是 $K^{3\times 1}$ 的基.

(2) 记 $e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $=(e_1,e_2,e_3)A, (\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(e_1,e_2,e_3)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=(e_1,e_2,e_3)B$, 则 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=$ $(e_1,e_2,e_3)B=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)A^{-1}B$, 所以 $A^{-1}B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, 即从基 ξ_1,ξ_2,ξ_3 到 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

作业: $P_{138}, 2(2), 3(2)$

思考题: 在 $F[x]_2$ 中, (1) 求证: $1, 1-x, 1-x^2$ 是基.

(2) 求基 $1,x,x^2$ 到基 $1,1-x,1-x^2$ 的过渡矩阵.