§3.7 坐标向量

教学目的和要求：正确理解映射，单映射，满映射，同构映射的概念，掌握线性空间的同构与集合的同构映射的联系和区别.

一. 一一映射

设 V, W 是两个集合，**映射**$\varphi : V \to W$ 是指一个对应法则，使得对于 V 中任意一个元素 α，都存在 W 中唯一一个元素 β 与之对应，记为 $\varphi(\alpha) = \beta$ 或 $\varphi : \alpha \mapsto \beta$.

两个映射 $\varphi : V \to W$ 和 $\psi : V \to W$ 成为相等，并记为 $\varphi = \psi$，如果对于任意的 $\alpha \in V$，都有 $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha)$.

设 $\varphi : V \to W$ 是一个映射，若对于任意 $\alpha \neq \beta \in V$，有 $\varphi(\alpha) \neq \varphi(\beta)$，则称 φ 是 **单映射**. 等价地，对于任意 $\alpha, \beta \in V$，若 $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$，必有 $\alpha = \beta$.

设 $\varphi : V \to W$ 是一个映射，对任意的 $\beta \in W$，存在一个 $\alpha \in V$，使得 $\varphi(\alpha) = \beta$，称 φ 是 **满映射**.

既单且满的映射称为 **一一映射**. 等价地，对任意 $\beta \in W$，存在唯一的一个 $\alpha \in V$，使 $\varphi(\alpha) = \beta$.

映射 $\varphi : V \to U$ 与 $\psi : U \to W$ 的合成定义为 $\psi\varphi : V \to W$，对于 $\alpha \in V$，$\psi\varphi(\alpha) := \psi(\varphi(\alpha))$.

例 1 (1) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto x^2$ 是非单非满映射；

(2) $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty), x \longmapsto x^2$ 是非单的满映射；

(3) $\varphi : [0, 1] \to [0, +\infty), x \longmapsto x^3$ 是单的非满映射；

(4) $\varphi : [0, 1) \to [0, 1), x \longmapsto x^3$ 是一一映射；

(5) $\varphi : K^{n\times n} \to K, A \longmapsto |A|$ 是非单的满映射；

(6) $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \longmapsto logx$ 是一一映射；

(6) $\varphi : K^2 \to K^2, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ 是非单非满映射.

例 2 $id_V : V \to V, x \longmapsto x$ 是一一映射，称为 **恒等映射**.

命题 映射 $\varphi: V \to W$ 是一一映射的充分必要条件是 $\psi: W \to V$ 使 $\psi\varphi = id_V, \varphi\psi = id_W$.

证明 充分性：对于 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$, 若 $\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2)$, 则 $\alpha_1 = \psi\varphi(\alpha_1) = \psi\varphi(\alpha_2) = \alpha_2$. 所以 φ 单.

对于任意 $\beta \in W$, 因为 $\varphi\psi = id_W$, 所以 $\beta = id_W(\beta) = \varphi(\psi(\beta))$, 所以存在 $\alpha = \psi(\beta) \in V$, 使得 $\varphi(\alpha) = \varphi(\psi(\beta)) = \beta$, 所以 φ 是满映射.

必要性. 对于任意 $\beta \in W$, 因为 φ 是满映射，所以存在 $\alpha \in V$ 使得 $\varphi(\alpha) = \beta$, 又因为 φ 是单映射，所以 α 是唯一的 (否则 $\varphi(\alpha_1) = \beta = \varphi(\alpha)$, 则 $\alpha_1 = \alpha$). 令 $\psi: W \to V, \psi(\beta) = \alpha$, 则 ψ 是一个映射.

对于任意 $\alpha \in V, \psi\varphi(\alpha) = \psi(\beta) = \alpha = id(\alpha)$, 所以 $\psi\varphi = id_V$.

对于任意 $\beta \in W$, 存在唯一 $\alpha \in V$, 使得 $\varphi(\alpha) = \beta$, 所以 $\varphi\psi(\beta) = \varphi(\alpha) = \beta$, 所以 $\varphi\psi = id_W$. □

命题 映射 $\varphi: V \to W$ 是一一映射， $\psi: W \to V$ 是一一映射，则 $\psi\varphi: V \to V$ 也是一一映射.

二. 同构映射

定义 设 V, U 是数域 K 上两个线性空间，若存在一一映射 $\varphi: V \to U$, 且满足

(1) 对任意的 $\alpha, \beta \in V$, $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$;

(2) 对任意的 $\alpha \in V$, $a \in K$, $\varphi(a\alpha) = a\varphi(\alpha)$,

则称 φ 是一个同构映射，并称 V 和 U 是同构的线性空间，记 $V \cong U$.

例 3 恒等映射 $id_V: V \to V, \alpha \mapsto \alpha$ 是 V 到 V 的同构映射.

例 4 $K^{n\times 1} \cong K^{1\times n}$.

定理 设 V 是 K 上的线性空间， $\dim V = n$, 则 $V \cong K^n$.

证明 取定 V 的一个基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$, 对 $\alpha \in V$, $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$ 且表示法唯一，令

$$\varphi: V \to K^{n\times 1}, \quad \alpha \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

则 φ 是映射. 设 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$, $\beta = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \cdots + b_n\varepsilon_n$. 若 $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, 则 $a_i = b_i, 1 \le i \le n$. 故 $\alpha = \beta$. 所以 φ 是单射; 对于任意 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)' \in K^n$, 令 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$, 则有 $\varphi(\alpha) = \beta$, 故 φ 是满映射; 易见对任意的 $\alpha, \beta \in V$, $\varphi(\alpha + \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$, 对任意 $a \in K, \alpha \in V$, $\varphi(a\alpha) = a\varphi(\alpha)$. 所以, φ 是同构映射. □

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, 且对于任意 α, 有 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$. 将 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)'$ 称为 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的坐标, 常记为 $\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

例 5 $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 在基 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; 在基 $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; 在基 $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

定理 (1) 设 $\varphi : V \to W$ 是线性同构, 则 $\varphi(0) = 0$;

(2) 设 $\varphi : V \to W$ 是线性同构, 则 φ 将线性相关的向量组变为线性相关的向量组, 将线性无关向量组变为线性无关的向量组, 即 φ 保持线性相关性;

(3) 设 $\varphi : V \to W$ 是同构映射, 则存在 $\psi : W \to V$ 是同构映射, 使得 $\psi\varphi = id_V, \varphi\psi = id_W$;

(4) 同构关系是等价关系;

(5) K 上两个有限维线性空间同构当且仅当它们的维数相等.

证明 (1) $\varphi(0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0)$, 所以 $\varphi(0) = 0$.

(2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 V 中线性相关的向量组, 则存在不全为 0 的 $a_1, a_2, \cdots, a_m$, 使得 $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m = 0$, 所以 $0 = \varphi(0) = \varphi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m) = a_1\varphi(\alpha_{1)} + a_2\varphi(\alpha_2) + \cdots + a_m\varphi(\alpha_m)$ 所以 $\varphi(\alpha_{1)}, \varphi(\alpha_2), \cdots, \varphi(\alpha_m)$ 线性相关.

另一方面, 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 是 V 中线性无关的向量组, 考虑 $a_1\varphi(\alpha_{1)} + a_2\varphi(\alpha_2) + \cdots + a_m\varphi(\alpha_m) = 0$, 即 $\varphi(a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m) = 0 = \varphi(0)$, 因为 φ 是单映射, 所以 $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_m\alpha_m = 0$, 又因为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关, 所以 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$, 所以 $\varphi(\alpha_{1)}, \varphi(\alpha_2), \cdots, \varphi(\alpha_m)$ 线性无关.

(3) 设 $\varphi: V \to W$ 是同构映射. 由命题，存在一一映射 $\psi: W \to V$, 使得 $\psi\varphi = 1, \varphi\psi = 1$, 下面证明 $\psi(\beta_1+\beta_2) = \psi(\beta_1)+\psi(\beta_2), \psi(\lambda\beta) = \lambda\psi(\beta)$, 事实上，设 $\beta_1, \beta_2 \in V$, 则存在唯一 $\alpha_1, \alpha_2 \in W$, 使得 $\varphi(\alpha_1) = \beta_1, \varphi(\alpha_2) = \beta_2, \varphi(\alpha_1+\alpha_2) = \beta_1+\beta_2$, 所以 $\psi(\beta_1+\beta_2) = \psi(\varphi(\alpha_1+\alpha_2)) = \alpha_1+\alpha_2 = \psi(\beta_1)+\psi(\beta_2)$. 另一方面，设 $\lambda \in K, \beta \in W$, 存在唯一 $\alpha \in V$, 使得 $\varphi(\alpha) = \beta$, 所以 $\varphi(\lambda\alpha) = \lambda\beta,$, 所以 $\psi(\lambda\beta) = \lambda\alpha = \lambda\psi(\beta)$.

(4) 反身性： $id_V : V \cong V$; 对称性：由 (3); 传递性：设 $\varphi : V \longrightarrow W$ 是同构映射，设 $\psi : W \to U$ 是同构映射，则上面命题知 $\psi\varphi$ 是一一映射，且 $\psi\varphi(\alpha+\beta) = \psi(\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)) = \psi\varphi(\alpha)+\psi\varphi(\beta)$, $\psi\varphi(\lambda\alpha) = \psi(\lambda\varphi(\alpha)) = \lambda\psi\varphi(\alpha) = \lambda(\psi\varphi(\alpha))$.

(5) 设 $\varphi : V \cong W, \dim V = n$, 且 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的基, 则 $\varphi(\varepsilon_1), \varphi(\varepsilon_2), \cdots, \varphi(\varepsilon_n)$ 在 W 中线性无关，且对任意 $\beta \in W$, 存在 $\alpha \in V$, 使 $\varphi(\alpha) = \beta, \alpha = \Sigma a_i\varepsilon_i$, 所以 $\beta = \varphi(\alpha) = \Sigma a_i\varphi(\varepsilon_i)$, 故 $\varphi(\varepsilon_1), \varphi(\varepsilon_2), \cdots, \varphi(\varepsilon_n)$ 是 W 的一个基，所以 $\dim W = n$.

反之， $\dim V = \dim W$, 则 $V \cong K^{n\times 1} \cong W$, 所以 $V \cong W$. □

例 6 设 V 是 n 维线性空间， $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是 V 的一个基， $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 在此基下的坐标为 $X_1, X_2, \cdots, X_m$, 则 $r(X_1, X_2, \cdots, X_m) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$.

证明 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下， $\varphi : V \longrightarrow K^{n\times 1}, \Sigma_{i=1}^n a_i\varepsilon_i \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, 则 φ 是同构映射. 且 $\varphi(\alpha_i) = X_i, 1 \le i \le m$, 设 $r(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = r$, 且 $\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{ir}$ 是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 的极大线性无关组，因为 φ 同构，所以 $\varphi(\alpha_{i1}), \cdots, \varphi(\alpha_{ir})$ 是 $K^{n\times 1}$ 中极大线性无关组，即 $X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{ir}$ 是 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 的极大线性无关组，所以 $r(X_1, X_2, \cdots, X_m) = r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$. □

例 7 在 $F[x]_4$ 中, 讨论 $f_1(x) = 2+x+3x^2+4x^4, f_2(x) = -1+2x+3x^2+x^3, f_3(x) = 3-x-x^3+4x^4$ 的秩.

解 取定 $F[x]_4$ 的基 $1, x, x^2, x^3, x^4$, 则 $f_i(x)$ 在此基下的坐标分别为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$\alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, 由上面例子知 $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 2$, 所以 $r(f_1, f_2, f_3) = 2$. □

作业： P_{132} 3，4

补充作业 1: 证明 $K^{2\times 2} \cong K^4$, 并写出同构映射.

补充作业 2: 设 A 是 n 阶可逆阵，定义 $\varphi : K^n \to K^n$, $X \mapsto AX$, 求证： φ 是同构映射.

思考：在 K^2 中，令 $\varphi : K^2 \to K^2$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2b \\ -a \end{pmatrix}$, 则 φ 是同构映射.