§3.6 矩阵的秩

教学目的和要求 掌握矩阵秩的定义及基本性质，了解用子式判别矩阵秩的方法，熟练掌握用相抵标准型，用行 (列) 向量组的线性关系和用方块初等变换来证明秩的命题的方法.

定义 $A \in K^{m\times n}$ 的行向量的秩称为 A 的 **行秩**. A 的列向量的秩称为 A 的 **列秩**.

定理 1 矩阵的行秩与列秩在初等变换下不变.

证明 (1) 首先证明矩阵的行秩在行初等变换下不变.

设 $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$, 其中 α_i 是 A 的行向量. 因为互换变换不改变 A 的行向量, 所以不改变行秩. 对于数乘变换，令 $A_1 = P_i(\lambda)A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_{i-1} \\ \lambda\alpha_i \\ \alpha_{i+1} \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$, 显然 A_1 的行向量与 A 的行向量等价. 对于消法变换，令 $A_2 = T_{ij}(\lambda)A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_i \\ \cdots \\ \lambda\alpha_i + \alpha_j \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$, 易见 A_2 行向量可由 A 的行向量线性表示. 反之， $\alpha_j = (-\lambda)\alpha_i + (\lambda\alpha_i + \alpha_j)$, 所以 A 行向量可由 A_2 的行向量线性表示. 故 A_2 与 A 行向量等价.

同理， A 的列秩在列初等变换下不改变.

(2) 证明矩阵的列秩经过行初等变换不变.

我们只要证明 QA 与 A 的列秩相同, 其中 Q 是初等阵. 记 $A = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$, $QA = (Q\beta_1, Q\beta_2, \cdots, Q\beta_n)$, 设 $r(A) = r$, 不妨设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 是 A 的列向量

的极大无关组，则 $Q\beta_1, Q\beta_2, \cdots, Q\beta_r$ 是 QA 的列向量的极大无关组．事实上，$\lambda_1 Q\beta_1 + \lambda_2 Q\beta_2 + \cdots + \lambda_r Q\beta_r = 0, Q(\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \cdots + \lambda_r\beta_r) = 0$, 因为 Q 可逆．所以 $\lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \cdots + \lambda_r\beta_r = 0$, 又因为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性无关，所以 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$.

对于任意 $Q\beta_j, \beta_j$ 可表为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 的线性组合， $\beta_j = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_r\beta_r$, 所以 $Q\beta_j = a_1 Q\beta_1 + a_2 Q\beta_2 + \cdots + a_r Q\beta_r$. 所以 QA 的列秩为 r, 即 QA 与 A 的列秩相同.

同理，可证 A 的行秩在列初等变换下不变． □

注 在证明" 矩阵的列秩经过行初等变换不变" 过程中, 我们不但指出 $r(QA) = r(A)$ 且指出 QA 与 A 的极大无关组在相同的列中.

推论 1 任一矩阵 $A \in K^{n\times n}$ 的行秩等于列秩.

证明 A 经初等变换变为 $B = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, B 的行秩 $=B$ 的列秩 $= r$. 因为初等变换不改变行秩和列秩，所以 A 的行秩 $=B$ 的行秩 $=B$ 的列秩 $=A$ 的列秩． □

注 定义 **矩阵 A 的秩** 为 A 的行秩 (或列秩), 记为 $r(A)$.

推论 2 $r(A) = r(A')$.

推论 3 设 $A \in K^{m\times n}$, P 为 m 阶可逆矩阵， Q 为 n 阶可逆矩阵，则 $r(PA) = r(A) = r(AQ)$.

推论 4 设 $A \in K^{n\times n}$. 则下列命题等价.

(1) $r(A) = n$;

(2) $|A| \neq 0$;

(3) A 的行 (列) 向量线性无关;

(4) A 的行向量 (列向量) 秩 $= n$.

证明 $r(A) = n \Leftrightarrow A$ 相抵于 $I \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 的行向量 (列向量) 秩 $= n$. □

推论 5 设 $A, B \in K^{m\times n}$. 则 A 相抵于 B 的充分必要条件是 $r(A) = r(B)$.

证明 必要性．因为初等变换不改变矩阵的秩.

充分性．设 A 相抵于 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, B 相抵于 $\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 因为 $r(A) = r(B)$, 所以 $r = s$. 由于矩阵的相抵关系满足对称性和传递性，知 A 相抵于 B. □

推论 6 $r(A)=r$ 的充分必要条件是 A 相抵于 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

下面介绍矩阵的秩的行列式判别方法.

定理 2 记 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, 则 $r(A)=r$ 的充分必要条件是 A 中存在的一个 r 阶子式不为 0, 且任意 $r+1$ 阶子式全为 0.

证明 必要性. 设 $r(A)=r$, 则 A 的任意 $r+1$ 行线性相关, 则 A 的任意 $r+1$ 阶子式的行向量线性相关, 所以任意 $r+1$ 阶子式为 0. 又因为 $r(A)=r$, 所以 A 有 r 行线性无关. 不妨设为前 r 行线性无关, 故 $B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}$ 的秩为 r. 所以 B 有 r 列线性无关, 即 A 有一个 r 阶子式不等于 0.

充分性. 设 $r(A)=t$. 由必要性知 $t\geq r$. 但若 $t>r$, 则有一个 t 阶子式不为 0, 由 Laplace 定理知此为不可能. 所以 $t=r$. □

下面是关于矩阵秩的一些命题的例子, 要注意学习和掌握证明方法.

例 2 设 $C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, 求证: $r(C)=r(A)+r(B)$.

证明 设 $r(A)=r$, $r(B)=s$, 则存在可逆阵 P_1,P_2,Q_1,Q_2, 使得

$$A=P_1^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1^{-1},\quad B=P_2^{-1}\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_2^{-1},$$

所以

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_1AQ_1 & 0 \\ 0 & P_2BQ_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & & I_s & 0 \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $r(C)=r+s=r(A)+r(B)$.

例 3 $r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$.

证明 1 设 $A\in K^{m\times n}$, $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\in K^{n\times s}$, 则 $AB=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_s)$. 设 $r(B)=r$, 不妨设 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 是 B 的行向量的极大线性无关组, 则任意的 β_j 可由 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 线性表出. 所以任意的 $A\beta_j$ 可由 $A\beta_{i_1}$, $A\beta_{i_2}$, $\cdots$, $A\beta_{i_r}$ 线性表示, 所以 $r(AB)\leq r(B)$, 考虑 A 的行向量可证 $r(AB)\leq r(A)$.

证明 2 设 $r(A)=r$, 所以 $A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$, 记 $QB=\begin{pmatrix} C_{r\times s} \\ D_{(n-r)\times s} \end{pmatrix}$, 则

$$r(AB)=r(P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QB)=r(\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{r\times s} \\ D_{(n-r)\times s} \end{pmatrix})=r(\begin{pmatrix} C_{r\times s} \\ 0 \end{pmatrix})\leq r.$$

同理，若取 B 的标准型，可得 $r(AB)\leq r(B)$.

证明 3 设 $r(A)=r$, $r(B)=s$, 则 $A=P_1\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1, B=P_2\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_2$, 则

$$r(AB)=r(\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1P_2\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}),$$

记 $Q_1P_2=\begin{pmatrix} C_{r\times s} & D \\ F & H \end{pmatrix}$ 则 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1P_2\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_{r\times s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $r(AB)=r(\begin{pmatrix} C_{r\times s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})\leq\min\{r,s\}$. □

例 4 设 $A\in K^{n\times n}$, 则 $A^2=A$ 的充分必要条件是 $r(A)+r(I-A)=n$.

证明 做矩阵的块的初等变换, $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I-A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I-A \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A & A \\ A & I \end{pmatrix}$ $\to\begin{pmatrix} A^2-A & A \\ 0 & I \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} A^2-A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, 所以 $r(A)+r(I-A)=r(A^2-A)+n$. 故 $A^2=A$ 的充分必要条件是 $r(A)+r(I-A)=n$. □

注 $r(A)+r(I-A)\geq n$.

例 5 一个矩阵添加一行 (或一列), 秩不变或加 1.

证明 设 $A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_m \\ \beta \end{pmatrix}$, 若 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则 $r(A)=r(B)$. 若 β 不可由 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则 $r(B)=r(A)+1$. □

例 6 $\alpha_1=(2,1,3,0,4),\alpha_2=(-1,2,3,1,0),\alpha_3=(3,-1,0,-1,4)$,

(1) 求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大线性无关组;

(2) 求 $r\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$;

(3) 将 (1) 中极大线性无关组扩为 $K^{5\times 1}$ 的一个基.

解 根据定理 1 的证明，对 A 作行的初等变换不改变列的线性相关性质. 因为

$$(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3') = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $r\{\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'\} = 2$, α_1, α_2 为极大线性无关组.

因为 $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, 令 $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则

$$|\alpha_1, \alpha_2, e_3, e_4, e_5| \neq 0,$$

故 $\alpha_1, \alpha_2, e_3', e_4', e_5'$ 是 $K^{5\times 1}$ 的一个基. □

作业： P_{126}: 2(2), 4,

5(1): 求证： $r(A, B) \leq r(A) + r(B)$;

5(3): 求证： $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$,

P_{127}: 8, 10

思考题： P_{127} 7, 9; P_{155} 7

挑战题： P_{127} 11, 12